

4. QOJ 11723

4.1. 题目大意

给你一张 n 个点 m 条边的简单无向图 X ，你需要构造一张图 G （允许存在重边，但不允许存在自环），使得 G 的线图 $L(G) = X$ 。或判断无解。

4.2. 数据规模

$$1 \leq n \leq 10^5, 0 \leq m \leq 10^5.$$

4.3. 解题过程

不妨设图连通。

首先解决 G 的重边，这只需要将所有距离自身 ≤ 1 的点构成集合相等的点缩为一个点，可以用哈希实现。

考虑搜索，维护当前的 G 。每次加入一个 X 中的点使得任意时刻被加入的点的导出子图都连通，在 G 上的影响即为加入一条边，即连接两个已有的点或连接已有的点和一个新增的点。需要满足这条边与 G 中有公共端点的边对应的点恰好是该点在 X 中相邻且此前被加入的点。

很容易发现当 G 中的点足够多时，加入边的方案是唯一的。具体来说，考虑使得任意一个点的邻边或两个不相邻（因为已经去除了重边）的点的邻边并集互不相同所需要的点数。下面用 $P(u)$ 表示点 u 的邻边集合。

- $P(u) = P(v)$ ：当且仅当 $n = 2$ 时存在这种情况。
- $P(u) = P(v) \cup P(w)$ ：当且仅当图为三元链时存在这种情况。
- $P(u) \cup P(v) = P(w) \cup P(x)$ ：当且仅当图为四元环或四元链时存在这种情况。
- $P(u) \cup P(v) = P(u) \cup P(w)$ ：不存在这种情况。

一种简单高效的实现方法是搜索时统计新增点的相邻点在图上对应边构成的子图中每个点的度数，然后枚举度数前 3 大的点与子图中不相邻的非孤点或新增点连边是否满足条件。由于搜索只会在上述情形产生分支，时间复杂度为 $O(n + m)$ 。

值得一提的是，此处的边是被区分的。如果不区分边，将类似地得到惠特尼同构定理：除了 K_3 和 $K_{1,3}$ ，任意两张不同构简单图的线图都不同构。

4.4. 参考资料

<https://qoj.ac/download.php?type=attachments&id=1742&r=1>