《二分图》解题报告

绍兴一中 周雨扬

【题目背景】

定义二分图为一种可以将点集 V 划分为 S,T 的图，满足：

1. S∪T=T，S∩T=Φ
2. 对于所有(x,y)∈E，有 x∈S，y∈T 或 x∈T，y∈S

定义二分图的一种 k 划分方案为将二分图中每一条边染一种 1 到 k 之间颜色的方案。

定义在二分图的一种 k 划分方案中 w_ij 表示经过第 i 个点的颜色为 j 的边的条数。

定义在二分图的一种 k 划分方案中点 i 的不平均度为 max{w_ij}-min{w_ij},j∈[1,k]。

定义二分图的一种 k 划分方案中的不平均度为所有点的不平均度之和。

【题目描述】

给定一个 S,T 中各有 n 个点的二分图。

初始时候二分图内没有任何一条边。

你需要支持向图中加边，删边。

同时求出任意一个不均匀度最小的 k 划分方案。

【数据范围】

测试点编号	n<=	k<=	Q<=
1	5	2	20
2	10		100
3	20		1000
4			10000
5			100000
6		10	1000
7			10000
8			100000
9			250000
10			500000

【时空限制】

时间：0.618S

空间：512MB

【测试点 1】

注意到任意时刻边数<=20

直接 O(2^边数)爆搜即可

时间复杂度 O(2^20*Q)。

【测试点 2】

可以对第一个点的爆搜加点优化。
或者来一个随机退火乱搞也可以。
时间复杂度 O(玄学)

【测试点 3】

我们大胆猜想最优方案中的不平均度=度数 mod k!=0 的点的个数。
直接套用上下界最大流或者费用流求解。
时间复杂度 O(Q*network_flow(n,n*n))

【测试点 6】

直接套用 k 次测试点 3 的算法即可。
首先答案肯定不会小于度数 mod k!=0 的点的个数。
现在只需要证明每一次网络流一定可以找到合法的同种颜色集合即可。
证明见 http://codeforces.com/blog/entry/4885?#comment-99798
时间复杂度 O(Q*k*network_flow(n,n*n))

【关于二分图最小边染色】

二分图的合法边染色方案满足:每条边均有颜色;每的点连出去的边颜色互不相同。
二分图的最小边染色数是所有合法边染色方案中颜色数的最小值。
二分图的最小边染色是所有合法边染色中颜色数最小的边染色方案。
定理 1：二分图最小边染色数=二分图上所有点度数的最大值。
构造：按照顺序在二分图中加边。
加入边(x,y)的时候,寻找 x 和 y 分别没有使用过的编号最小的颜色(lx,ly)
如果 lx==ly 直接将这一条边染色成 lx。
否则我们尝试将连接在 y 上面的颜色为 lx 的边的颜色改为 ly。
修改过程可以类似看成一条颜色为 lx,ly 交替的唯一有限增广路。
将增广路上的边全部反色即可。
时间复杂度 O(边数*点数)

【测试点 4, 7】

将二分图拆点。
对于一个边数超过 k 的点，将其拆成多个意义相同的点。
在拆点时保证：
度数不超过 k。
对于每个点拆出去的点度数不是 k 的最多只有一个。
直接对新图跑二分图最小边染色就能构造出一组合法方案。
对于新图来说，点数 O(n^2/k+n),边数=n^2
时间复杂度 O(Q*(n^4/k+n^3))