IOI2026 中国国家集训队集中培训 第二试 A. 深红

IOI2026 中国国家集训队工作组

2025 年 12 月 3 日

问题（深红（art））

- 给定 n, m, k 以及长度为 k 的排列 p，设 S 为全体大小为 $n \times m$，元素为 $[1, k]$ 内整数的矩阵构成的集合，记矩阵的行号 $0 \sim n-1$，列号 $0 \sim m-1$。
- 定义等价关系 $\sim$，对于 $A, B \in S$，$A \sim B$ 当且仅当，可以使用若干次将第一行移动到最后一行或将第一列移动到最后一列的操作，从 A 转换到 B。
- 定义 $f : S \to S$ 如下：对于所有 $0 \le i < n$，$0 \le j < m$，$f(A)_{i,j} = p_{A_{i,j}}$。
- 设 $S' = \{A | A \in S \wedge A \sim f(A)\}$。
- 第一问：求 $|S'|$ 大小；第二问：求 S' 被等价关系 $\sim$ 划分出的等价类数量。
- 答案均对 $998,244,353$ 取模。

数据范围：$n, m \le 10^3$，$k \le 10^6$。

$nm \leq 16$ 且 $k \leq 2$

$nm \le 16$ 且 $k \le 2$

- $|S| = k^{nm}$，在 $\Theta(k^{nm}\,\mathrm{poly}(n,m))$ 的时间内可以枚举 S'，从而两个问题都是简单的。
- 这个子任务用于测试你的暴力是否正确。

对于所有 $1 \le i \le k$，均有 $p_i = i$

对于所有 $1 \le i \le k$，均有 $p_i = i$

- 此时 $f(A) = A$，从而 $S' = S$，第一问答案就是 k^{nm}，第二问是 Pólya 定理最经典的例题。
- 由于数据范围较小，合理的做法均可通过。
- 这个子任务用于提示你这是一道群论题，以及 Pólya 定理（或 Burnside 引理）至少可以解决一个特殊情况。
- 本来的设计是该子任务两问都答对才可以获得其他子任务的分数，但由于太不合理被否决了。

最多能选出的**互不相似**的优美的画的数量

最多能选出的**互不相似**的优美的画的数量

- 一个简单但重要的观察是，如果 $A \sim B$，那么 A, B 要么同时属于 S'，要么同时不属于。
- 我们用群论的语言重述这道题：S 的定义如题面，设 $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$。群 G 中元素 $a = (x, y)$ 对于 $A \in S$ 的群作用 $g(a, A)$ 是将 A 行方向上 shift x 次，列方向上 shift y 次。群作用将 S 划分为了若干轨道，问有多少轨道满足，从中任取一个元素 A，$f(A)$ 也在该轨道内。
- 考虑 Burnside 引理，其实相当于说如果固定 $A \in S$，设 A 所在轨道是 $\mathrm{orbit}(A)$，则取一个随机的 $a \in G$，对于固定的 B，$B = g(a, A)$ 的概率是：对于 $B \in \mathrm{orbit}(A)$，是 $|\mathrm{orbit}(A)|^{-1}$；否则是 0。

- 考虑 Burnside 引理，其实相当于说如果固定 $A \in S$，设 A 所在轨道是 $\mathrm{orbit}(A)$，则取一个随机的 $a \in G$，对于固定的 B，$B = g(a, A)$ 的概率是：对于 $B \in \mathrm{orbit}(A)$，是 $|\mathrm{orbit}(A)|^{-1}$；否则是 0。
- 取 $B = f(A)$，则 $f(A) = g(a, A)$ 的概率在 $f(A) \in \mathrm{orbit}(A)$ 即 $A \sim f(A)$ 时概率是 $|\mathrm{orbit}(A)|^{-1}$，否则是 0。
- 对整个轨道算贡献，若这个轨道符合条件，概率和是 1，否则是 0。
- 所以可以考虑以下解决第二问的算法：枚举 $(x, y) \in G$，计算有多少矩阵 A 满足 $f(A) = g((x, y), A)$，加起来之后把答案除以 $|G| = nm$。计算对应的矩阵 A 是简单的：相当于数有多少下标 $[0, n) \times [0, m)$ 的矩阵 A 使得对于所有 i, j，均有 $p_{A_{i,j}} = A_{(i+x) \bmod n, (j+y) \bmod m}$，视作 nm 个点的有向图，一条边要求被指向的点染的颜色 y 必须与出发点颜色 x 满足 $p_x = y$，图是若干条链，容易计算染色方案数。
- 可以做到 $\Theta(d(n)d(m)\log(nm))$ 之类的复杂度，但实际上劣得多例如 $\Theta(nm\log(nm))$ 的实现也可通过。

最多能选出的**互不相同**的优美的画的数量

最多能选出的**互不相同**的优美的画的数量

- 解法三可以计算合法轨道数量，现在要求合法轨道大小和，直接的想法是对于所有 i，求出有多少大小为 i 的合法轨道。
- 考虑轨道大小的影响因素：设轨道的代表元是 A，则 $|\mathrm{orbit}(A)|$ 的大小可以由其稳定子群 $\mathrm{Stab}(A)$ 定义为 $\{a|a \in G \land g(a, A) = A\}$ 唯一确定：

$$|\mathrm{orbit}(A)| = \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(A)|},$$

  这也是 Burnside 引理告诉我们的结论。
- $\mathrm{Stab}(A)$ 是 G 的子群，$G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$，这个群并不复杂，**考虑直接枚举** $G' = \mathrm{Stab}(A)$。
- 想法是：枚举所有 G' ，算出有多少合法轨道满足其中的元素的稳定子群就是 G'，然后乘上 $|G|/|G'|$ 加和即得答案。

- 设 L 为全体满足以下条件的三元组 (n', m', k) 构成的集合：$n' \mid n$，$m' \mid m$，$0 \le k < \gcd(n', m')$。设 R 为 G 所有子群构成的集合。
- 有双射 $\varphi : L \leftrightarrow R$ 定义如下：

$$\varphi((n', m', k)) = \left\langle (n', 0), (0, m'), \left(\frac{n'}{s} \gcd(k, s), \frac{m'}{s} k \right) \right\rangle,$$

其中 $s = \gcd(n', m')$。
- 不用抽代术语解释，现在相当于在考虑一些二元组，前一项是 $[0, n)$ 内整数，后一项是 $[0, m)$ 内整数，二元组的加法是逐项加法，前一项模 n 后一项模 m。现在希望选一些二元组构成一个集合，使其对加法封闭。
- 直觉是，两个维度看上去比较独立，似乎分别有“最小周期”n' 和 m'，然后选出的集合就是所有前一项是 n' 倍数，后一项是 m' 倍数的二元组。
- 然而当 $n = m$ 时选 $(0,0), (1,1), \ldots, (n-1, n-1)$ 也对加法封闭，但未考虑到，显然不充分。

- 但上述直觉差不多是对的，实际上对于一个对加法封闭的二元组集合，设 $(n',0)$ 是其中满足后一项为 0 中前一项在非零的前提下最小的，$(0,m')$ 相应定义，在已经加入 $(n',0),(0,m')$ 的前提下，至多再加入一个“斜分量”就可以生成这个二元组集合了。
- 对“斜分量”的理解：现在其实可以认为分别对 n',m' 取模，L 中考虑的斜分量形如 $((n'/s)\cdot\gcd(k,s),(m'/s)\cdot k)$。相当于将剩余 $n'\times m'$ 的矩阵按行列各分成 $s=\gcd(n',m')$ 块，则 $(\gcd(k,s),s)$ 大致是要求“斜分量”生成的非零二元组中前一项最小的，正是这个斜分量。
- 此处略去对这个双射的严谨证明，事实上这个双射只是对 G 子群的一个便利的参数化表示。

- 考虑对于一个 (n',m',k)，设其对应的子群是 G'，如何计算有多少合法轨道满足其中元素的稳定子群就是 G'。
- 放松限制：不要求 G' 是恰好是对应的稳定子群，只要求 G' 中元素都确实是稳定子，即只要求 G' 是轨道稳定子群的一个子群。
- 对于 $A \in S$，要求 G' 内元素都是 A 的稳定子，相当于限制 $\forall a \in G'$，记 $a' = (x,y)$，A 与其行 shift x 再列 shift y 完全相同。即现在只考虑行上以 n' 为周期、列上以 m' 为周期、还符合斜分量的矩阵，要计算构成多少个合法轨道。
- 答案显然等于 $n' \times m'$ 且符合斜分量的矩阵，构成多少个合法轨道。

- 斜分量使得，确定 $n' \times m'$ 矩阵的前 $(n'/s) \cdot \gcd(k, s)$ 行后，接下来的行由斜分量自动唯一确定，还是用行列各分成 s 个块的视角考虑，即前 $\gcd(k, s)$ 的块行（即实际上是前 $(n'/s) \cdot \gcd(k, s)$ 行）确定后，整个矩阵被确定为，第 $\gcd(k, s) \sim 2\gcd(k, s) - 1$ 个块行是前 $0 \sim \gcd(k, s) - 1$ 个块行整体循环右移 k 个块，依次类推。这样有 $s/\gcd(k, s)$ 组块行，右移总量是 $k \cdot (s/\gcd(k, s))$ 是 s 的倍数。
- 设 $\hat{S}$ 为 $n' \times m'$ 且符合斜分量的矩阵构成的集合，枚举 $(\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})$ 内的元素 $a = (x, y)$，计算有多少 $A \in \hat{S}$ 使得 $f(A) = g(a, A)$ 即可。
- 视作只需确定 A 的前 $(n'/s) \cdot \gcd(k, s)$ 行，剩下自动按规则补全，进行一些复杂的推导之后，符合条件的矩阵 A 数量可写作一个较为简洁的式子。

- 最后注意由于之前放松了限制，现在每个 G' 只算出了有多少合法轨道使得该轨道的稳定子群包含 G'，因此还要根据子群的包含关系做一次容斥。
- 标程使用较为暴力的方法实现了上面的想法，例如枚举 $(\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})$ 内元素这一步直接暴力枚举，最后根据子群包含关系容斥也是枚举了每一对 G 的子群判断是否包含。
- 时间复杂度难以分析，但总之是 $\Theta(\mathrm{poly}(n,m)+k)$，经测试可以在时限内通过所有 $n,m \le 1000$ 的数据。
- 更劣的 $\mathrm{poly}(n,m)$ 至少可以通过 $n,m \le 50$ 的子任务；$n=1$ 或 $\gcd(n,m)=1$ 时，群 G 的结构更简单，上述算法可以略去很多情况。
- 欢迎分享更优秀的解法。