관측탑 – 풀이

작성자: 이종영

부분문제 1

$i < j, H[i] < H[j]$인 최소 j를 $P[i]$로 정의하자. (편의상 $H[N] = \infty$로 정의한다.) i번 관측탑에서 관측 가능한 관측탑들은 $P[i], P[P[i]], \ldots$이다. 트리 T를 $P[i] \to i$ 간선들로 만들어진 루트가 N인 트리로 정의하자. 이제 i번 관측탑에서 관측 가능한 관측탑들은 i부터 루트까지의 경로 상의 관측탑들이다.

관측탑들을 길이 $N^{0.5}$의 구간들로 나누면, 지각 변동 이벤트에서 상대적인 높이가 변화하는 구간들은 최대 2개이다. 또한 $i \to P[i]$에서 소속 구간이 바뀌는 횟수는 $O(N^{0.5})$번이다. 이를 이용해 같은 구간 내의 $i \to P[i]$만 관리한다면, 다음 구간으로 넘어가는 경우는 해당 구간에서 prefix maximum들만 고려해도 되기 때문에 이분 탐색을 통해 다음 지점을 구할 수 있다.

부분문제 2

부분문제 1과 유사하게 관측탑들을 길이 $N^{0.5}$의 구간들로 나눈다. 각 i에 대해, 각 구간에서 관측 가능한 관측탑의 수를 미리 구한다. 이제 측정 이벤트에서 $[L, R]$에 완전히 포함된 구간들은 해당 값들을 이용하면 구할 수 있다. 나머지 부분은 부분문제 1과 유사하게 처리할 수 있다.

부분문제 3

부분문제 1의 풀이에서 이미 관측되는 관측탑들은 구할 수 있다. 이를 쿼리 처리에도 유사하게 처리할 경우 관측 점수 또한 관리가 가능하다.

부분문제 4

모든 지각 변동 이벤트에서 $L = R$임을 이용해 오프라인 동적 연결성 알고리즘과 유사하게, 모든 업데이트를 높이가 지정되지 않았던 특정 관측탑의 높이를 지정하는 것으로 생각한다. 이제 높이들을 관리하는 세그먼트 트리 내에서 이분 탐색을 통해 해당 관측탑이 가리게 되는 관측탑의 구간을 구할 수 있다. 0번 관측탑에서 관측 가능한 관측탑들은 다른 관측탑이 가리지 않는 관측탑들이므로, 세그먼트 트리 등을 통해 각 관측탑이 가리는 구간을 관리하면 관측 이벤트 또한 처리 가능하다. 총 시간 복잡도는 $O(N \log N + Q \log^2 N)$이다.

부분문제 5

$j < i, H[i] \le H[j]$인 최대 j를 $P[i]$로 정의하자. (편의상 $H[-1] = 0$로 정의한다.) i번 관측탑에서 j번 관측탑이 관측 가능할 필요충분조건은 $P[j] < i < j$이다.

모든 지각 변동 이벤트에서 $L = R, V \ge 0$이므로 $P[L]$을 제외한 P값들은 L로 증가하는 것 만 가능하다. 결국 구간에 $P[i] = \max(P[i], L)$ 업데이트를 적용하는 것이므로, 세그먼트 트리 비츠를 적용하면 P값들을 관리할

수 있다. 업데이트를 적용할 구간 및 $P[L]$의 값은 H값들의 최댓값 세그먼트 트리에서 이분 탐색을 통해 구할 수 있다.

이제 관측 이벤트와 측정 이벤트를 처리하는 방법을 알아본다. $\{j : P[j] < i < j\} = \{j : P[j] < i\} \setminus \{j : j \le i\}$임을 이용하자. $[1, i)$범위의 P값의 관측 점수에 1을 더하고, $[1, i]$범위의 인덱스의 관측 점수에 -1을 더하는 업데이트를 하면 된다. 이제 측정 이벤트는 $P[L]$의 관측 점수와 L의 관측 점수의 합이 된다. P값이 변하는 경우, P값의 관측 점수의 변화가 있으므로 인덱스의 관측 점수에 해당 변화만큼 빼 주어야 한다. 이는 세그먼트 트리 비츠 과정에서 자연스럽게 적용할 수 있다. 시간 복잡도 $O((N+Q)\log^2 N)$ 등에 해결할 수 있다.

부분문제 6

다음과 같이 세그먼트 트리를 구성하자. 각 구간 $[L, R]$을 나타내는 노드 u에 대해, 관리하는 구간 $[L, R]$을 $range(u)$, 왼쪽 자식을 $left(u)$, 오른쪽 자식을 $right(u)$라고 하자. 관리하는 값들은 구간 내 높이 최댓값 $max(u)$, 높이 0에서 관측을 시작해 $range(u)$를 지나갔을 때 지나가는 관측탑의 수 $jumps(u)$, $max(left(u))$에서 관측을 시작해 $range(right(u))$를 지나갔을 때 지나가는 관측탑의 수 $rjumps(u)$.

$jumps$값들과 $rjumps$ 값들은 세그먼트 트리 내에서 이분 탐색을 이용하면 각 노드마다 $O(\log N)$에 구할 수 있다. 구체적으로, 현재 높이 h에 대해, $h < max(left(u))$인 경우 $left(u)$에서 h로 관측을 진행한 후, $right(u)$에서 $max(left(u))$로 관측을 진행하기에 $rjumps(u)$가 더해진다. $h \ge max(left(u))$인 경우 $right(u)$에서 h로 관측을 진행하면 된다.

지각 변동 이벤트는 lazy propagation을 사용하면 처리할 수 있다. 관측 이벤트는 일반적인 세그먼트 트리에서의 쿼리처럼 진행하되, 노드들 간에는 $jumps$ 값들을 구했던 과정을 비슷하게 반복하면 처리할 수 있다. 이제 $jumps$와 $rjumps$값들에 관여하는 노드들에만 전파하는 lazy propagation을 통해 관측 가능한 관측탑들에만 업데이트를 처리할 수 있다. 자식들이 아닌 $O(\log N)$개의 자손들에 값을 전달해줘야 함에 유의하자. 이제 전체 문제를 $O(N\log N + Q\log^2 N)$에 해결할 수 있다.