CCF NOI 冬令营 2026《二进制》解题报告

CCF NOI 冬令营 2026 命题组

2026 年 2 月 9 日

性质

- 性质 1：两个数地最后一次操作一定不可能相同。
- 性质 2：某次 $\times 2$ 后面不会有连续两次 $+1$。
- 推论：一定有一个数全程没有进行 $\times 2$ 操作。
- 进一步地，设 $x \cdot 2^k \le y < x \cdot 2^{k+1}$，则最优策略中 x 只可能乘 2^k 或 2^{k+1}。
- 若 x 乘 2^{k+1}，则操作次数为 $k + y - x2^k$。以下只考虑 x 乘 2^k 的情况。

$O(\log y)$

- 令 $x \leftarrow x \cdot 2^k$，则在乘 2^k 前一定会先进行 $\lfloor \frac{y-x}{2^k} \rfloor$ 次 $+1$ 操作。
- 设余数 $z = (y - x) \bmod 2^k$，则一种可行的策略是进行 $\operatorname{popcount}(z)$ 次 $+1$ 操作，故该部分答案不超过 $\log y$。
- 另一种可行的策略为，先对 y 进行若干次 $+1$，此时 z 发生变化。设 $y \leftarrow y + k$，则操作次数为 $k + \operatorname{popcount}(z + k)$。
- 直接枚举 $k = 0, \ldots, \log y$ 即可得到答案，时间复杂度 $O(\log y)$。

$O(\log\log y)$

- 进一步地，每次只可能令 $z \leftarrow z + \mathrm{lowbit}(z)$。
- 此时只会枚举 $\log\log y$ 次，时间复杂度 $O(\log\log y)$。

$O(1)$

- 观察发现，由于 $k < 64$，上述贪心过程**几乎**只和 z 的低 6 位有关。
- 预处理 $z \bmod 64$ 所有情况下的最优的 k（限制加的 lowbit 不超过低 6 位），询问时只需要处理预处理的结果与将 z 的低六位全部加成 0 的情况，时间复杂度 $O(1)$。