APIO 2026 中国区《集宝》试题讲解

APIO 2026 中国区命题组

2026 年 5 月 9 日

题目描述

给定一颗 n 个点单位边权的无根树，给定其上面的 m 个邻域，第 i 个用 (u_i, d_i) 表示，代表树上所有满足 $dis(u_i, v) \le d_i$ 的点 v 构成的点集，记作 S_i。

询问给出 x, l, r，表示从 x 出发，每次可以走到相邻的点，要求依次到达过编号在 $l \sim r$ 内的点所需的最少移动步数。

关键观察

- 关键观察 1：以下方案是一组最优解：依次考虑 i 从 l 到 r，从 x 出发走到距其最近的 $\in S_i$ 的点。
- 关键观察 2：假设依次要求到达点集 $S_1 \sim S_m$ 内的点，选 $1 \leq i < m$ 使得 $S_i \cap S_{i+1} \neq \varnothing$，则将点集序列替换为 $S_1, S_2 ... S_{i-1}, S_i \cap S_{i+1}, S_{i+2} ... S_m$，对任意起点，问题的答案不变。

关键观察：应用

下面对于点 u 以及点集 S，记 $dis(u,S)$ 为 u 到点集 S 内点的距离最小值。

从而可以考虑这样求解答案：

- 每次对 l 找出最大的 $l \le p \le m$ 使得设 $S' = \cap_{k=l}^{p} S_k$ 则 $S' \neq \varnothing$。
- 若 $p \ge r$，则 $R = \cap_{k=l}^{r} S_k$ 非空，答案直接是 $dis(x,R)$，结束。
- 否则 $p < r$，即 $S' \cap S_{p+1} = \varnothing$。根据关键观察 1，一组最优解是从 x 先走到最近的 S' 内的点，再走到最近的 S_{p+1} 内的点，分析后可见在过程中必须走到 S' 内距 S_{p+1} 最近的点，设为 nxt。从而先将答案加上 $dis(x,nxt)$，走到 nxt 也完成了 $l \sim p$ 这些限制，接下来让 $l \leftarrow p+1, x \leftarrow nxt$ 即可。

面临的问题

使用这种求解答案的方式，可以通过预处理减少很多重复计算，因为 p 和 nxt 完全由 l 决定，不妨用 p_l, nxt_l 代表 l 求出的对应值，算法可写作：

- 只要 $p_l < r$，将答案加上 $dis(x, nxt_l)$ 后让 $l \leftarrow p_l + 1, x \leftarrow nxt_l$。
- 若 $p_l \geq r$，计算 $R = \cap_{k=l}^{r} S_k$ 后将答案加上 $dis(x, R)$ 并结束。

于是只需要面临几个主要困难：

1. 如何表示一些邻域之交？并判断交集是否为空？
2. 在 1 的基础上，如何再给定一点，计算其到邻域交集的最小距离？(即求解 $dis(x, R)$)
3. 如何计算 nxt_l？

如何解决

对于问题 1 的答案：要判断点 v 是否满足 $\forall 1 \le i \le m, dis(v,u_i) \le d_i$，相当于计算 $\max_{i=1}^{m}(dis(v,u_i) - d_i)$。在 d_i 全都相同时，熟知只需考虑 u_i 在树上距离最远的一对点（点集直径）就能算出这个 $\max$ 的答案，从而对任意多个 (u_i, d_i)，总能只保留两个而保持交集不变；d_i 不全相同时，也有类似的论证。无论如何，下面只考虑两个邻域交的形式，这直接导致判断交集是否为空是非常简单的。

如何解决

对于 2，相当于对于 x，找到使得 $dis(x,u)$ 最小的 u 使得 $u \in R$。使用 1 的表示方式，这相当于找到 u 同时满足 $dis(u,u_1) \le d_1, dis(u,u_2) \le d_2$ 且 $dis(x,u)$ 最小。答案的下界是 $\max(dis(x,u_1)-d_1, dis(x,u_2)-d_2)$，且可证明在 $(u_1,d_1),(u_2,d_2)$ 有交时这个答案必可取到。

对于 3，nxt_l 相当于距离 u_{p_l+1} 的最近的 S' 内的点，从而这个问题几乎与 2 等价，区别仅在于需要计算从 u 出发向 u_1 走 $dis(x,u_1)-d_1$ 步后结点的编号（这是 $dis(x,u_1)-d_1 \ge dis(x,u_2)-d_2$ 的情形）。

继续优化

使用 $\Theta(n\log n)-\Theta(1)$ 的 LCA 以及 $\Theta(n\log n)-\Theta(\log n)$ 的树上 K 级祖先，以及一些数据结构支持在长度为 m 的序列上查询 q （或 $\Theta(m+q)$）次区间半群信息，即可在不超过 $\Theta((n+m+q)\log(n+m+q))$ 的时间内解决原问题。

对上述过程精细实现可得到 $\Theta(n+(m+q)\alpha(m+q))$ 的算法，α 为反阿克曼函数。