

NOI 2026 第一试《线段》解题报告

NOI 2026 命题组

2026 年 7 月 20 日

- $n \leq 20$: 枚举所有 2^n 个点集, 然后检查是否是树即可。
- $k = 2$: 直接枚举两条线段检查是否相交。
- $k = 3$: 此时树的形态只能是一条链, 考虑枚举链中间的点对应的区间 $[l, r]$, 然后需要枚举 $[l_1, r_1], [l_2, r_2]$, 满足 $l \leq r_1 < l_2 \leq r$ 。只需要分开枚举 r_1, l_2 , 前缀和优化后即可做到 $\mathcal{O}(tnm)$ 。

特殊性质 A

- 将线段按照左端点从小到大排序，得到 $[l_1, r_1], [l_2, r_2], \dots, [l_n, r_n]$ 。由于不存在包含关系，必然有 $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ 。使用一个简单的序列 DP 即可求解。

特殊性质 B

- 首先按照区间包含关系建一棵树出来，简单分析可以发现树的形态只能是一个菊花：存在一个最外层的中心 u ，其余线段都是 u 的后代，并且两两不相交。于是在树上做一个简单的树形 DP 即可。
- 若不显式建树，直接进行区间 DP 也是可行的。

性质分析

- 结合以上两种特殊性质，对原问题进行分析，可以得到，树的形态一定是一条毛毛虫。即存在一条由特殊性质 A 构成的链，然后其中每个区间下包含若干个不交的小区间，对应特殊性质 B 构成的菊花。
- 以下是一个简略的证明：考虑区间图的两个性质：
 - 1 区间图是弦图，即任意长度至少为 4 的环都有弦；
 - 2 若三条线段两两相交，则它们存在公共交点。
- 因此，区间图中只要出现环，就一定能够找到一个三元环。
- 于是，选出的线段构成一棵树，当且仅当区间图连通，并且不存在三条两两相交的线段。

状态设计与转移

- 考虑使用动态规划求解。
- 对于 $s \geq 2$, 定义 $f_{s,x,y}$ 表示选择了 s 条线段, 并且最近一次加入线段后, 最近相交的两条线段的右端点分别为 x, y ($x \leq y$) 的方案数。
 - 若 $x = y$, 则该状态不能继续扩展。
 - 若 $x < y$, 则在 $(x, y]$ 区间内, 右端点为 y 的线段可以与下一条线段相交。
- 转移时考虑枚举一条加入的线段 $[l, r]$, 需要满足 $x < l \leq y$, 然后转移到 $f_{s+1, \min(y, r), \max(y, r)}$ 。
- 时间复杂度为 $\mathcal{O}(nm^2K)$ 。

优化

- 注意到新状态只跟 r 有关，于是可以对 l 进行前缀和优化。
- 对于所有 l, y ，预处理出 $\sum_{x < l} f_{s, x, y}$ ，然后转移时直接使用即可，无需再次枚举 x 。最终的时间复杂度为 $\mathcal{O}(nmK)$ 。
- 由于空间限制只有 512 MiB，因此还需要使用滚动数组将空间复杂度优化至 $\mathcal{O}(m^2)$ 。