

$$\frac{n}{O} \leq 5$$

$$\frac{n}{O} \leq 100$$

$$\frac{n}{O} \leq 1000 \text{ 与特殊性质 B}$$

$$\frac{n}{O} \leq 10^5$$

$$\frac{n}{O} \leq 5 \times 10^5$$

NOI 2026 第一试《传送》解题报告

NOI 2026 命题组

2026 年 7 月 20 日

$$\bullet \quad n \leq 5$$

$$\circ \quad n \leq 100$$

$$\circ \quad n \leq 1000 \text{ 与特殊性质 B}$$

$$\circ \quad n \leq 10^5$$

$$\circ \quad n \leq 5 \times 10^5$$

$$n \leq 5$$

- 暴力枚举所有可能的通行方式并计算答案。时间复杂度是指数级的。
- 也可以直接分类讨论各种情况。

$n \leq 100$

- 考虑从 x_i 出发到 y_i 的最优的通行方式会具备什么特征。首先如果在一个非终点的城市 s 选择了前往相邻的城市 t , t 一定在 s 到 y_i 的最短路径上。那么每个城市只有两种选择：向 y_i 移动一步，或者使用传送门。
- 更进一步地，一旦在某个城市 s 选择了向 y_i 移动，那么在之后的城市也会继续选择向 y_i 移动而非使用传送门，不然一定不优。
- 这意味着每个点 s 实际上只有两种情况：一种是直接沿着树上 $s \rightarrow y_i$ 的最短路径移动到 y_i ，耗时为 $d(s, y_i)$, $d(a, b)$ 表示 a, b 两点在树上的距离；另一种是使用传送门，期望耗时是一个固定的常数。
- 由此可知最优的通行方式一定形如：存在一个常数 k ，与 y_i 距离不超过 k 的点都选择向 y_i 移动，其余的点则选择使用传送门。基于这个性质，只需要枚举常数 k 然后计算答案，复杂度 $\mathcal{O}(n^2 m)$ 。

$n \leq 1000$ 与特殊性质 B

- 由刚才的分析，记 $f(a, b)$ 表示从点 a 到点 b 的所有通行方案的期望耗时的最小值。设 $E_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i, b)$ ，则有：

$$f(a, b) = \begin{cases} d(a, b), & d(a, b) \leq 1 + E_b, \\ 1 + E_b, & d(a, b) > 1 + E_b. \end{cases}$$

- 只要知道 E_b 的整数部分就能求出 E_b ，于是可以直接枚举 $\lfloor E_b \rfloor$ 然后解方程验证最后得到 E_b 。事实上，这里枚举的整数部分即为之前枚举的常数 k 。
- 如果对每个询问求一次 E_{y_i} ，时间复杂度为 $\mathcal{O}(nm)$ 。
- 若 $n < m$ ，则可以预处理所有 E_i ，时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^2 + m)$ 。
- 对于特殊性质 B，只要求一次 E_0 ，时间复杂度为 $\mathcal{O}(n + m)$ 。

$$n \leq 10^5$$

- 构造辅助函数 $g_b(x) = x - \frac{1}{n} \sum_i \min(d(i, b), 1 + x)$, 则有以下两条性质:
 - 1 $g_b(E_b) = 0$;
 - 2 g_b 单调递增。这是因为 $h(x) = \min(k, 1 + x)$ 的导数只可能有 0, 1 两种取值。实际上, $g'(x)$ 也是单调的。
- 对应到枚举常数 k 的做法, 可以通过观察直接发现答案关于 k 是单谷的。
- 于是问题变为求 g 的零点, 或者说求零点的整数部分。
- 二分答案, 问题变为给定 x 求 $\sum_i \min(d(i, b), 1 + x)$, 这等价于求满足 $d(i, b) \leq 1 + x$ 的 i 的数量, 以及满足 $d(i, b) \leq 1 + x$ 的 $d(i, b)$ 的和。
- 这是经典邻域信息, 可以用点分树维护。总时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \log^2 n + q)$ 。
- 对于特殊性质 A, 即树是一条链的情况, 二分后的问题是简单的, 不需要使用点分树维护, 时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \log n + q)$ 。

$$\frac{n}{0} \leq 5$$

$$\frac{n}{0} \leq 100$$

$$\frac{n}{0} \leq 1000 \text{ 与特殊性质 B}$$

$$\frac{n}{0} \leq 10^5$$

$$\frac{n}{\bullet} \leq 5 \times 10^5$$

$$n \leq 5 \times 10^5$$

- 继续观察性质，注意到对于相邻的两点 b, c ，对应的所有点到 b 的期望 E_b 和到 c 的期望 E_c 一定满足 $|E_b - E_c| \leq 1 \implies |\lfloor E_b \rfloor - \lfloor E_c \rfloor| \leq 1$ 。
- 因此在求出了 $\lfloor E_b \rfloor$ 后，不再需要通过二分求 $\lfloor E_c \rfloor$ ，而是可以直接验证它是否等于 $\lfloor E_b \rfloor - 1, \lfloor E_b \rfloor, \lfloor E_b \rfloor + 1$ 。这样只需要进行 $\mathcal{O}(n)$ 次邻域查询，总时间复杂度降为 $\mathcal{O}(n \log n + q)$ 。