

NOI 2026 第二试《木棉》解题报告

NOI 2026 命题组

2026 年 7 月 22 日

解法一：模拟

- 对每次询问，分别用根据 Prüfer 序列构造树的 $\mathcal{O}(|V|)$ 算法模拟。
- 总时间复杂度为 $\mathcal{O}(nm)$ ，可以获得 20 分。

边集与 Prüfer 序列

- 考察树的边集与 Prüfer 序列的关系，可以发现：
- Prüfer 序列的每个元素 p_i ，对应树上一条以 p_i 为端点的边；
- 此外，树上还有一条特殊边，不对应 Prüfer 序列中的任何元素。

特殊边

- 考虑进一步刻画特殊边。
- 特殊边的两个端点，自然应当是最后剩余的两片叶子。
- 不难注意到， $\max V = |V| - 1$ 和 $\text{last } p = p_{|V|-3}$ 都会被剩下。
- 所以，若 $p_{|V|-3} \neq |V| - 1$ ，则特殊边即 $(|V| - 1, p_{|V|-3})$ 。
- 而若 $p_{|V|-3} = |V| - 1$ ，那么 $|V| - 2$ 必然会被剩下，故此时特殊边即 $(|V| - 1, |V| - 2)$ 。

序列元素对应的边

- 考察根据树结构按顺序生成 Prüfer 序列的过程。
- 生成 p_i 时, p_i 应当是当时最小叶子 v_i 的唯一相邻点。
- p_i 与 v_i 的地位本质不同。
- 一个结点成为叶子的操作, 即其在 Prüfer 序列中最后一次出现位置。
- 通过扫描线, 可以在 $\mathcal{O}((n+m)\log n)$ 的时间复杂度内计算上述信息。
- 于是, 不妨设, 若 (x, y) 为树边, 则 x 为对应的 v_i , y 为对应的 p_i 。

转化：小叶子数目

- 考察根据 Prüfer 序列生成树的过程。
- x 被连边的步骤，即小于 x 的叶子被清空的步骤的后继。
- 考虑考察小于 x 的叶子数目 s 的变化。
- 可以根据 x 在序列中最后一次出现的位置，把 s 的变化划为两段。

第一段： x 最后一次出现前

- 记 x 的最后一次出现为 p_t 。
- 一个元素 p_i 对 s 的影响形如：
 - 1 $s \leftarrow \min\{s - 1, 0\}$;
 - 2 若这是结点 p_i 的最后一次出现且 $p_i < x$, 则 $s \leftarrow s + 1$ 。
- 注意到每次 $s \leftarrow s + 1$ 都会立即被下一个位置的 $s \leftarrow s - 1$ 消耗掉。
- 故 p_t 对应的步骤结束后, s 的初值 $s_0 = \max\{A - B, 0\}$, 其中
 - $A = |\{0 \leq z < x : z \notin \{p_{t+1}, \dots, p_{r-1}\}\}|$
 - $B = t - l + 1$ 。
- A 可以写成三维数点的形式。

第二段： x 最后一次出现后

- 整理思路：要定位的是 s 从 0 “变成” -1 的步骤。
- 若 p_i 非最后一次出现或 $p_i \geq x$ ，则 p_i 会令 $s \leftarrow s - 1$ 。
- 每个元素对 s 造成影响的条件，可以写成 $\text{next}_i \geq r \vee p_i \geq x$ 的二维偏序形式。
- 于是，要求 s 何时变为 -1 ，可以近似转化为：
 - 给定一个三维带权点集 S ，记

$$f(x, y, z) = \sum_{\substack{(x', y', z') \in S \\ x' < x \wedge y' < y \wedge z' < z}} w(x', y', z'),$$

- 给定 x, y, c ，求 $\min z$ s.t. $f(x, y, z) \geq c$ 。
- 三维数点的几乎全部解法，都可以求解此问题。
- 至此，题目的核心被转化为两次三维数点。
- 可以在 $\mathcal{O}((n+m) \log^2 n)$ 或 $\mathcal{O}((n+m)\sqrt{n})$ 等时间复杂度内求解。

子任务设计

- 测试点 1 ~ 5: 模拟即可, 时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2m)$ 或 $\mathcal{O}(nm)$ 。
- 测试点 6 ~ 9: Prüfer 序列中出现过的结点数较少, 朴素地特殊处理各结点最后一次出现即可。
- 测试点 10 ~ 13: x, y 较小, s 的初值较小, 且会较快地变为 0, 各部分均可直接模拟。
- 测试点 14 ~ 16: y 的期望出现次数为 $\mathcal{O}(1)$, 可以把第二段的类三维数点问题化为朴素的三维数点。
- 测试点 17 ~ 19: 各结点的最后一次出现位置固定, 三维数点可以化为二维数点。
- 测试点 20 ~ 22: 复杂度较高但 $\mathcal{O}((n+m)^2)$ 的解法。