

三生三世的财富 解题报告

华东师范大学第二附属中学 韩书简

题目大意

Alice 和 Bob 在一个长度为 n 的序列上博弈。序列中每个元素的值只能是 0 或 1，且每个元素的取值时刻在游戏开始前就已确定。

给定长度为 n 的序列 p 和 a ，其中 p 是 $1 \dots n$ 的一个排列， $a_i \in \{-2, -1, 0, 1\}$ 。

序列的第 i 个元素会在第 p_i 个时刻确定取值，规则如下：

- 若 $a_i=0$ ，则该元素被赋值为 0；
- 若 $a_i=1$ ，则该元素被赋值为 1；
- 若 $a_i=-1$ ，则该元素的值由 Alice 在该时刻决定；
- 若 $a_i=-2$ ，则该元素的值由 Bob 在该时刻决定。

游戏开始前，Alice 和 Bob 都知道序列 p 和序列 a 。游戏共进行 n 个时刻，第 k 个时刻确定的是满足 $p_i=k$ 的那个位置 i 的取值； n 个时刻结束后，序列的每个元素都恰好被确定了一次取值。

同色连续段被定义为一个二元组 (l, r) 满足 $1 \leq l \leq r \leq n$ ，且第 l 个元素到第 r 个元素的值全部相同；若它不能再向左右延伸（即 $l=1$ 或第 $l-1$ 个元素与它们不同，且 $r=n$ 或第 $r+1$ 个元素与它们不同），则称它是一个**极长同色连续段**。 (l, r) 的长度为 $r-l+1$ 。

Alice 希望最大化第 n 个时刻后序列所有极长同色连续段长度的最大值，Bob 希望最小化该值。

给定正整数 $typ \in \{1, 2\}$ 。

如果 $typ=1$ ，双方都会按最优策略行动，请求出最终序列极长同色连续段长度的最大值。可以证明答案是确定的。

如果 $typ=2$ ，额外给出长度为 n 的序列 A 。 $A_i \in \{0, 1\}$ ，表示博弈的第 i 个时刻发生的决策为：令 x 为唯一满足 $p_x=i$ 的 $1, 2, \dots, n$ 中的正整数，将序列的第 x 个元素赋值为 A_i （可能发生宇宙射线击中了第 x 个位置导致 $a_x, A_i \in \{0, 1\}$ 且 $a_x \neq A_i$ 的情况）。请求出对于 $i=0, 1, \dots, n$ ，如果第 i 个时刻及之前都按照 A 序列的决策博弈，第 i 个时刻结束后双方都按最优策略行动，最终序列中最长同色连续段的长度。

数据范围

对于所有数据，保证：

- $1 \leq T \leq 2 \times 10^5, 1 \leq n \leq 2 \times 10^5, 1 \leq \text{typ} \leq 2, 1 \leq \Sigma n \leq 2 \times 10^5$ 。
- p 是 $1 \dots n$ 的一个排列。
- $a_i \in \{-2, -1, 0, 1\}$ 。
- $A_i \in \{0, 1\}$ 。

子任务编号	T ≤	n ≤	typ=	Σ n ≤	特殊性质	分值
1	2 × 10 ⁵	2 × 10 ⁵	1	2 × 10 ⁵	A	3
2	40	20	2	40	无	9
3	200	200	1	200		10
4			2			8
5	2000	1000	1	2000		8
6	2 × 10 ⁵	2 × 10 ⁵		2	2 × 10 ⁵	B
7			11			
8			1	无		17
9			2			20

特殊性质 A: 保证 $a_i \in \{0, 1\}$ 。

特殊性质 B: 保证 p 和 a 在长度为 n 且符合限制的序列中随机生成。

解题过程

约定

记满足 $a_i = 0$ 的位置为 0 点。

记满足 $a_i = 1$ 的位置为 1 点。

记满足 $a_i = -1$ 的位置为 A 点。

记满足 $a_i = -2$ 的位置为 B 点。

记在排列 p 的小根笛卡尔树中，子树 u 内编号最小的点为 u_L 。

记在排列 p 的小根笛卡尔树中，子树 u 内编号最大的点为 u_R 。

记以 u_L 为左端点， u_R 为右端点的闭区间为区间 u 。

若 u, v 及两者间的所有点同色，则称 u, v 连通。

若两个区间的交集为空集，且两个区间并集中的正整数从小到大排序后相邻两项的差为 1，则称两个区间相邻。

若三元组 $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ 满足 $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, x_3 \leq y_3$ 则称 (y_1, y_2, y_3) 被 (x_1, x_2, x_3) 支配。

Subtask 1

Alice 和 Bob 全程未参与博弈，可以线性计算答案。

Subtask 2

第 i 个时刻的最优决策仅依赖于第 $1, 2, \dots, i-1$ 个时刻的决策。

在决策树上搜索，时间复杂度为 $O(n^2 2^n)$ 。

Subtask 5

建立排列 p 的小根笛卡尔树。

结论 1：如果 u 满足，笛卡尔树上 u 子树内含有 B 点，那么 Bob 总可以选择一种最优策略使得游戏结束后不存在包含子树 u 内所有点，但不以子树 u 内的点为端点的同色连续段（也就是在区间 u 的基础上两侧至少各向外延伸一个点）。

证明：考虑如果存在这样的局面，翻转子树 u 内决定时刻最晚的 B 点，一定不会使答案变大。

由题意得，答案满足可二分性。

二分答案，问题转为判定答案是否不超过 $limit$ 。

由小根笛卡尔树性质，当 u 做决策时，区间 u 外左相邻同色连续段的颜色 cL 和右相邻同色连续段的颜色 cR 已经固定。

如果区间 u 内不包含 B 点，那么决策是好刻画的，需要记录区间内所有可能的情况中最长前缀 0/1 长度，后缀 0/1 长度，同色连续段长度。

如果区间 u 内包含 B 点，假如额外固定了区间 u 外左相邻的极长同色连续段颜色长度，那么在子树 u 内：

- Bob 的决策为在答案不超过 $limit$ 的情况下最小化区间 u 的后缀极大 cR 同色连续段长度。
- Alice 的决策为优先让答案超过 $limit$ ，在此条件无法达成的情况下最大化区间 u 的后缀极大 cR 同色连续段长度。

可以证明区间 u 的后缀极大 cR 同色段长度在双方的博弈下可以唯一确定。

记 $dp_{u, cL, cR, wL}$ 表示区间 u 与长度为 wL 的 cL 同色连续段左相邻，与 cR 同色连续段右相邻，则最终后缀极大 cR 同色连续段长度是多少，如果已经决策的点中已经有同色连续段长度超过了 $limit$ ，那么记此 dp 值为 $limit+1$ 。

状态转移方程略。

时间复杂度 $O(n^2 \log n)$ 。

Subtask 4

每次询问当成一个新的 $\text{typ}=1$ 的问题做。

时间复杂度 $O(n^3 \log n)$ 。

Subtask 3

考虑记录另一种信息。

如果区间 u 内包含 B 点，那么记录区间 u 内，前缀极长 c_L 同色连续段长度 len_L ，后缀极长 c_R 同色连续段长度 len_R ，极长同色连续段长度 len ，就能刻画区间 u 对区间 u 以外的影响。

那么子树 u 就可以用若干个三元组 $(\text{len}_L, \text{len}, \text{len}_R)$ 刻画。

定义三元组 (L, M, R) 合法当且仅当 Bob 存在一种策略使得无论 Alice 采取怎样的策略，最终三个实际长度不超过 L, M, R 。

如果子树 u 可以选择对子树外的影响为 $(\text{len}_L, \text{len}, \text{len}_R)$ ，那么也可以选择对子树外的影响为被 $(\text{len}_L, \text{len}, \text{len}_R)$ 支配的三元组。

结论 2：如果子树 u 内包含至少一个 B 点，那么可以视作 Bob 控制了子树 u 的策略，可以选择对子树外的影响为合法的三元组中的任意一个。

证明：如果子树内只含一个 B 点，结论显然成立。

如果左右儿子的子树恰有一个包含至少一个 B 点，结论显然成立。

左右儿子的子树都包含至少一个 B 点，那么：

- 父亲是 $0/1$ 点时，结论显然成立
 - 父亲是 A 点时，合法的三元组为父亲是 0 点时合法三元组，与父亲是 1 点时合法三元组的交集
 - 父亲是 B 点时，合法的三元组为父亲是 0 点时合法三元组，与父亲是 1 点时合法三元组的并集
- 因此对于父亲子树结论成立。

综上，结论成立。

对于子树 u ，合法的三元组可能有 $O((u_R - u_L)^3)$ 种。

注意到由于结论 2 成立，被另一个合法三元组支配的合法三元组是无用的， Bob 选择支配它的三元组永远不劣于选择此三元组。

结论 3：子树 u 内，如果前缀 lenL 个点包含了多少个 B 点，后缀 lenR 个点包含了多少个 B 点，都确定了，那么满足此条件的子树 u 的不被其他合法三元组支配的合法三元组构成的集合大小为 0 或 1。

证明：假如以取出 lenL 包含的最后一个 B 为起点的序列，那么 lenL 可以取到除了第一个元素以外全是 A 点，且所有元素都在第一个元素的子树中，满足这两个条件的最长前缀。

易证这也是 lenL 所能取到的极限，且不会对 len 与 lenR 造成影响。

对称后可以得到 lenR 所能取到的极限。

由于 lenL ， len ， lenR 互不影响，因此集合中不存在合法三元组，或存在且仅存在一个合法三元组。

记 $\text{dp}_{u,cL,cR,wL,wR}$ 为子树 u 左相邻同色段颜色为 cL ，右相邻同色段颜色为 cR ，所有合法的三元组 $(\text{lenL}, \text{len}, \text{lenR})$ 中， lenL 覆盖了恰好 wL 个 B 点， lenR 覆盖了恰好 wR 个 B 点的情况下， len 的最小值是多少，如果不存在满足此条件的合法三元组，记 len 最小值为 $n+1$ 。

时间复杂度为 $O(n^4)$ ，常数较小。

可能存在常数极小的 $O(n^4 \log n)$ 做法，或 $O(n^3 \log n)$ 做法。

Subtask 6

结论 4：如果一个区间 $[l, r] (l \leq r)$ 满足存在 $l \leq x < y < z \leq r$ 使得 x, y, z 都是 B 点，且 $p_y > p_x, p_y > p_z$ ，那么 Bob 总可以在答案不增大的情况下使游戏结束后区间 $[l, r]$ 不全同色。

由结论 1 自然得证。

在随机数据下可能同色的区间包含的 B 个数上界期望为 $O(\log n)$ 。

因此 dp 的时间复杂度为 $O(n \log^4 n)$ ，常数极小。

可能需要一些优化技巧比如转移时跳过被支配的三元组。

Subtask 7

询问按照 p 从小到大更改，因此笛卡尔树很多节点的 dp 值不需要重算，只需要更新更改的节点 u 在笛卡尔树上的根链上的所有节点的 dp 值。

在随机数据下根链长度上界期望为 $O(\log n)$ 。

因此时间复杂度为 $O(n \log^5 n)$ ，常数极小。

可能需要一些优化技巧比如转移时跳过被支配的三元组。

Subtask 8

如果观察了足够多的数据你会发现一件神奇的事情：Bob 总可以在答案不增大的情况下使游戏结束后所有同色区间包含的 B 点个数小于 4。

接下来将详细证明这个性质。

结论 5：存在一个常数 K ，满足对于任意 u ，子树 u 内，所有没被其他合法的三元组支配的合法三元组的 $lenL$ 不会覆盖超过 K 个 B 点， $lenR$ 不会覆盖超过 K 个 B 点。

证明：首先把所有 0 点和 1 点的决策时间提到所有的 A 点和 B 点之前，不会造成任何影响。

如果子树中恰好包含一个 B 点或不包含 B 点，结论成立。

如果左右儿子的子树都含有至少一个 B 点，那么考虑合并过程， u 的 $lenL$ 只会从左儿子的 $lenL$ 中选择。同理， u 的 $lenR$ 只会从右儿子的 $lenR$ 中选择。因此，子树 u 中结论成立。

如果左右儿子中恰有一者含有至少一个 B 点：

如果 u 是 0 点或 1 点或 A 点，那么覆盖的 B 点个数不会增加，结论成立。

如果 u 是 B 点，由于结论 2 成立，有一个儿子的子树被 Bob 控制决策，而另一个子树的决策是可预料的（因为不含 B 点）。

不妨假设左子树包含至少一个 u 。

容易得出 cL 是否与 cR 同色对子树 u 的作用与 cL 和 cR 具体是什么的作用等效。

如果左子树中 cL 和 cR 相同时的 dp 值与 cL 和 cR 不同时的 dp 值相同，那么可以视作左子树先选择策略， u 后选择颜色。

如果左子树中 cL 和 cR 相同时的 dp 值与 cL 和 cR 不同

令 f 代表 cL 和 cR 相同这个命题的真假。

那么子树中存在两种策略分别对应 f 为真与 f 为假的情况。

那么如果 Bob 采用 $\neg f$ 的策略，那么只可能会影响到 $lenL$ 和 $lenR$ 中的一者，且 Bob 可以自由选择影响哪边。我们称这种策略为影子策略。

如果存在一种情况满足左子树的 $lenR$ 已经包含了 K 个 B 点，并且与 u 子树外右相邻的同色连续段中的点连通，那么依据 Bob 在左子树是否采用影子策略，并选择影响左子树的 $lenR$ ，与 u

节点颜色是否改变，可以分讨出这种情况一定会被另一种情况的合法三元组支配，因此不会存在 lenL 或 lenR 覆盖了超过 K 个 B 点且未被支配的情况。

综上，得证。

结论 6: 结论 5 的 K 紧下界为 1。

下界不为 0 显然。

可以把 $K=1$ 代入结论 5 的证明，得出 K 可以取到 1。

由于上文的 dp 保证了所有同色连续段都满足存在一个点 u ，此同色连续段由左儿子的 lenR ，点 u ，右儿子的 lenL 拼接而成，由结论 6， K 可以取 1，三部分各自最多贡献一个 B 点，因此同色连续段覆盖的 B 点个数不超过 3。

时间复杂度 $O(n)$ ，常数较大。

Subtask 9

注意到所有 0 点和 1 点的决策时间改变不影响问题的答案，而制约算法的瓶颈在于根链长度。

这启发我们重排 0 点和 1 点的笛卡尔树形态，尽量减小树的深度。

由于每次只会改变 p 值最小的点，更改后其成为 0 点或 1 点，因此仿照 splay 建出已经修改过的点的笛卡尔树，每次修改时顺便把修改节点旋转到根，即可保证复杂度正确。

时间复杂度 $O(n \log n)$ ，常数较大。

一种不同的解法？

李秉霈同学分享了一种全新的做法：

二分答案 limit 后，可以视作限制了所有 $[l, l+\text{limit}]$ 的区间都包含两种颜色，按照时刻从后往前处理每个点，经过一系列合并或翻转操作后可以在正确的时间复杂度内判定是否满足限制。

赛时也有选手想到了此解法。

总结

本题是一道思路较为简单的动态规划题，考察了选手对于笛卡尔树，贪心，树型 DP 的深刻理解。

然而另一种不同思路的做法有待研究。

参考资料与致谢

本题是 Luogu P10608 的改编，参考了原题的部分思路。

感谢顾浩宸同学与我讨论本题的做法及证明。

感谢齐奕翔同学提供的帮助。

感谢李秉霖同学分享了他的想法并与我讨论本题的做法。