Ruins 3

解説：岸田陸玖

問題概要

- A は $(1,1,2,2,\dots,N,N)$ の順列であり、 以下の操作を N 回行った後の数列の正の値を持つ番号が指定される（i 番目が指定されている番号であるとき、 A_i は**残る**と呼ぶことにする）

- 2 個の番号に同じ値を持つ場合、番号が小さいほうを -1 加算する

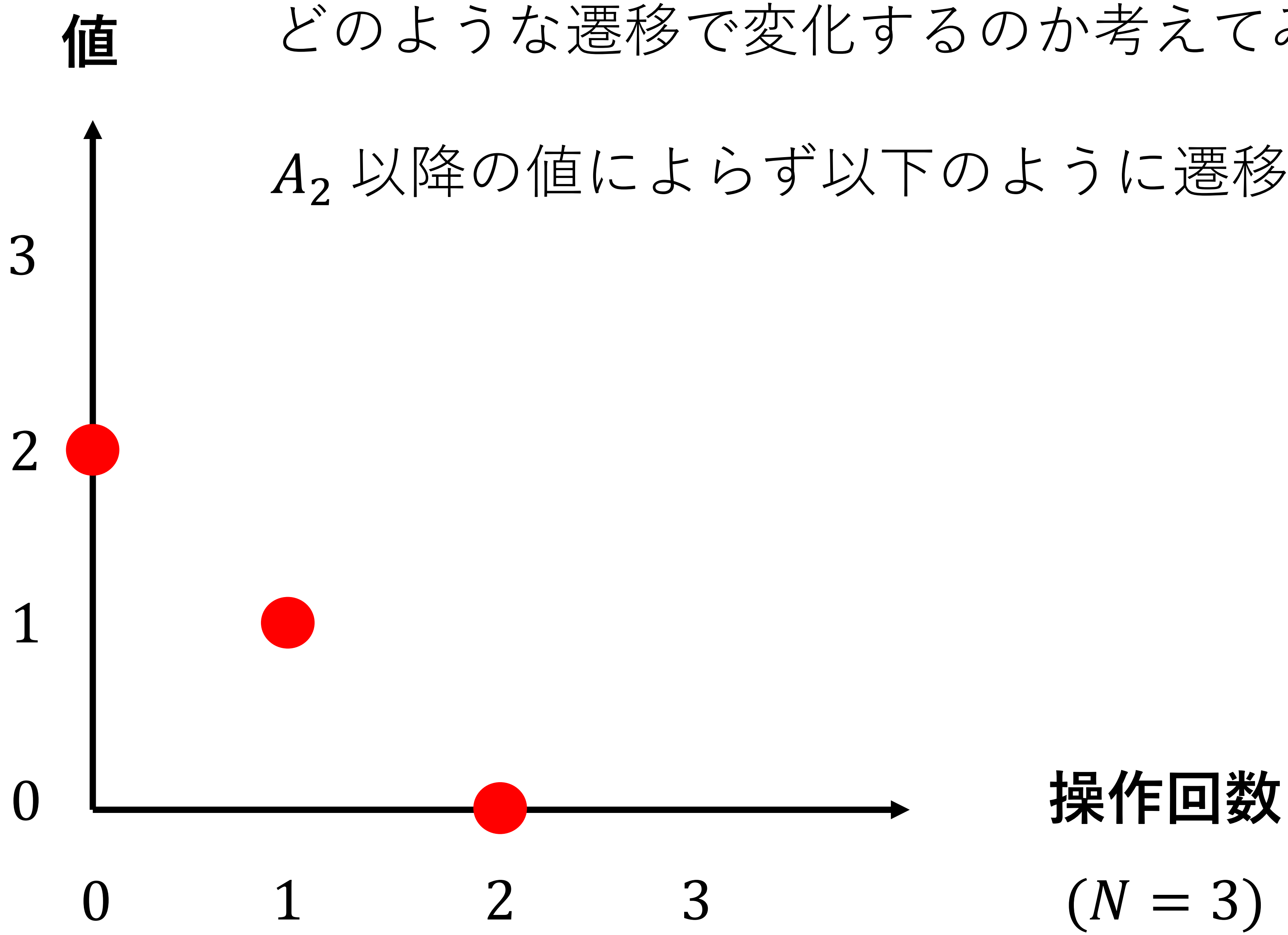
- A の通り数は？

小課題 1 $(N \leq 13)$

- $(1,1,2,2,\ldots,N,N)$ の順列は $\frac{(2N)!}{2^N}$ 個ある
- $N = 13$ のとき約 5×10^{22} 個あるので全探索では間に合わない
- 操作を繰り返し行うことで数列がどのように変化するのかを考察してみる

$A_1 = 2$ のとき操作を行うことで
どのような遷移で変化するのか考えてみる

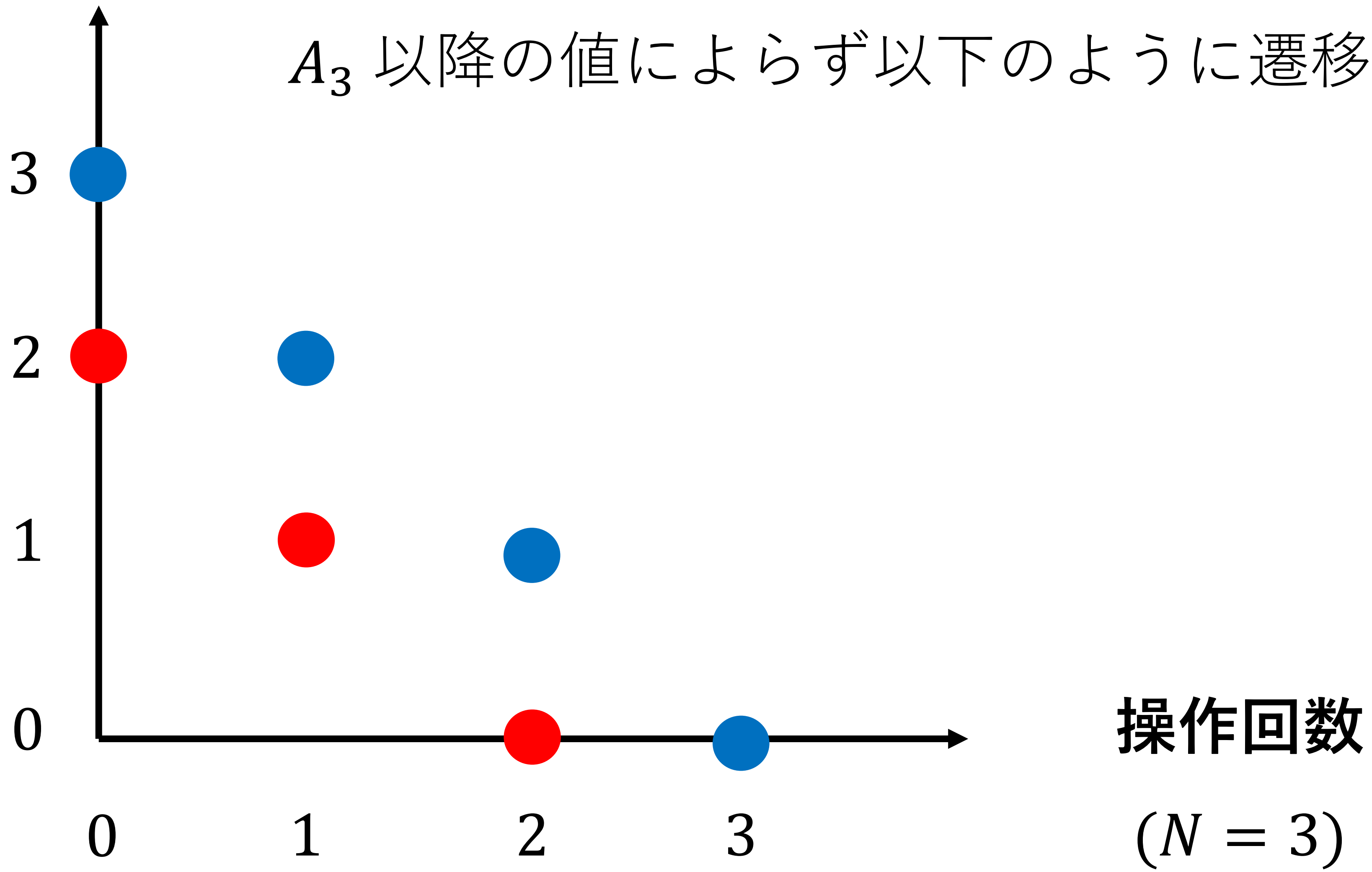
A_2 以降の値によらず以下のように遷移する



$A_2 = 3$ のとき操作を行うことで
どのような遷移で変化するのか考えてみる

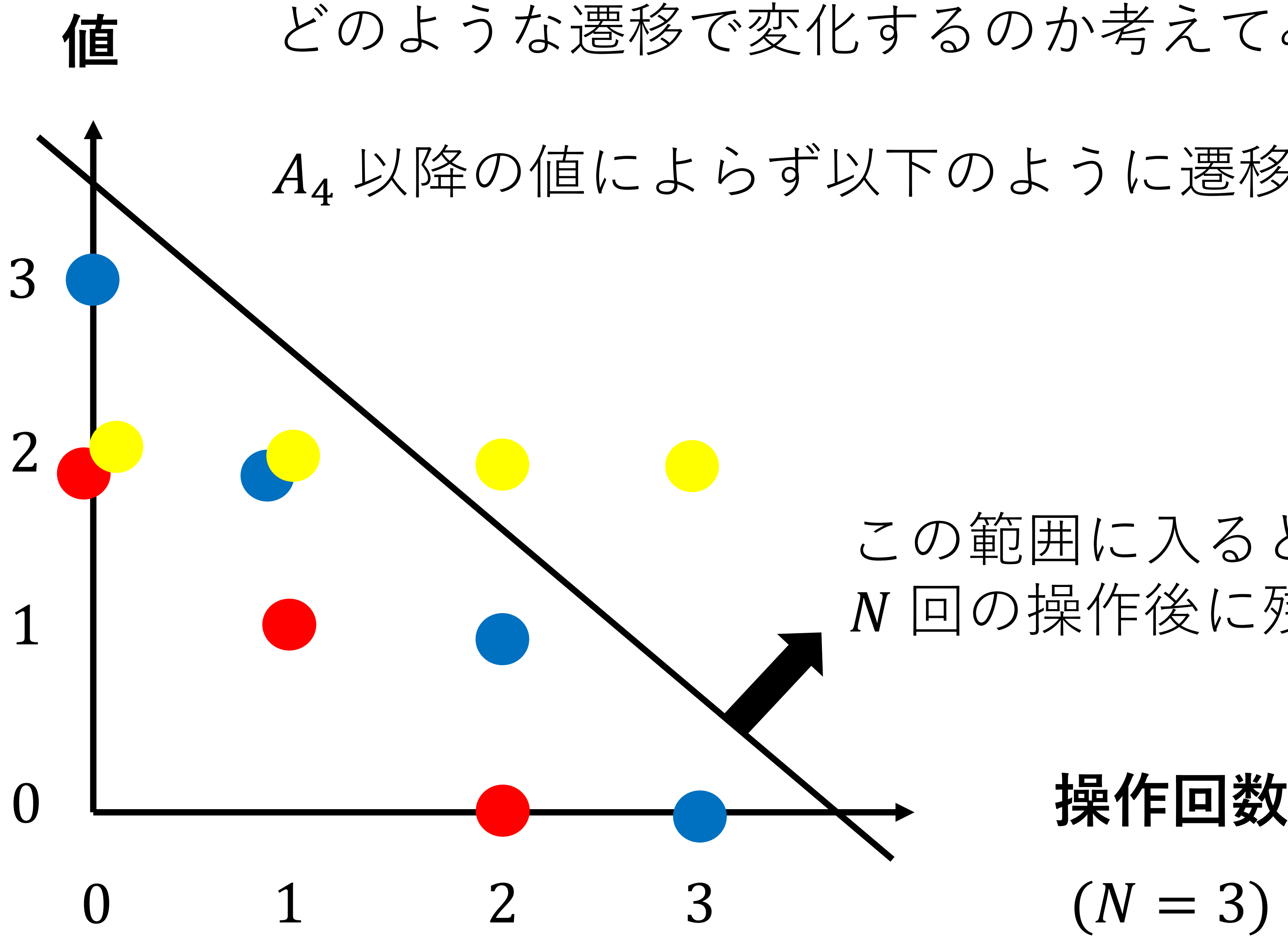
値

A_3 以降の値によらず以下のように遷移する



$A_3 = 2$ のとき操作を行うことで
どのような遷移で変化するのか考えてみる

A_4 以降の値によらず以下のように遷移する



小課題 1 ($N \leq 13$)

- 前の例のように i 番目の値が残るか否かは $[1, i)$ 番目の値にのみ依存することが推測できる
- 実際この推測は正しく、i 番目の値が残る条件は次のように言い換えることができる

- $B_j = \#\{k \in [1, i) | A_k = j\}$と定義する
  $\sum_{j=k}^{l} (B_j - 1) \geq 0 \ (k \leq l \leq N)$ が成り立つような $k \leq A_i$ が存在する

小課題 1 ($N \le 13$)

- B_j の値をkeyとして、1番から順に値を決めるようにDPをすればよい
- $0 \le B_j \le 2$ より $O(3^N N)$ または $O(3^N N^2)$ で解くことができる

- 6点！

小課題 2 ($N \leq 60$)

- B_j の値すべてをkeyとしてDPするのはできない
- $\sum_{j=k}^{l}(B_j - 1) \geq 0$ ($k \leq l \leq N$) が成り立つような k の最小値 k' をkeyとしてDPできそう

小課題 2 ($N \leq 60$)

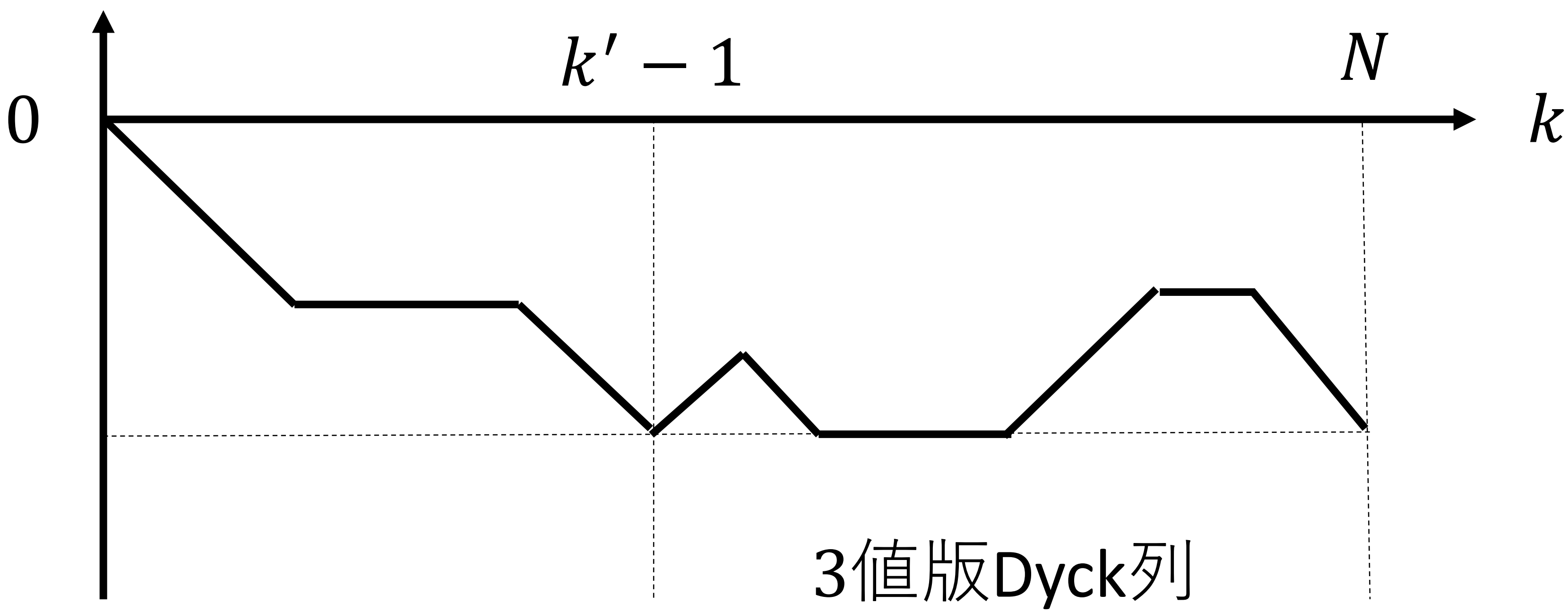
- 条件を次のように言い換えてみる

- $B_j = \#\{k \in [1, i) | A_k = j, A_k$ は残らない$\}$として $\sum_{j=k}^{l}(B_j - 1) \geq 0\ (k \leq l \leq N)$ が成り立つような $k \leq A_i$ が存在する

- このように B_j の定義を変えてみると $\sum_{j=k}^{N}(B_j - 1) = 0$ が成り立ち、Dyck列（対応の取れた括弧列）に類似したものになる

小課題 2 $(N \leq 60)$

- $\sum_{j=1}^{k}(B_j - 1)$ の値の変化について考えてみる



小課題 2 ($N \leq 60$)

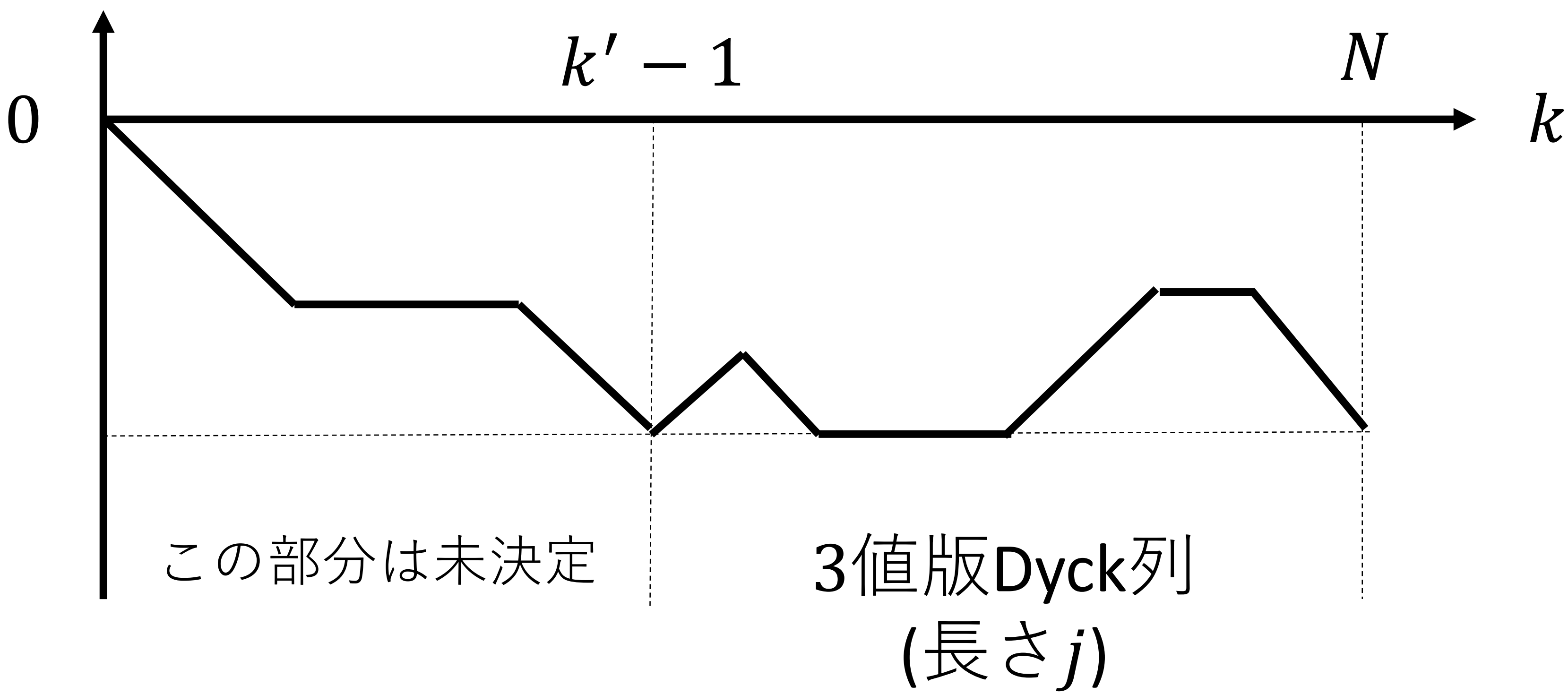
- $dp[i][j]$ を $[1,i)$ 番目まで A_i を（一部を除いて）決めた時、$k' = N - j + 1$ となるような通り数と定義する

  ※残らない番号で3値版Dyck列に含まないのは未決定にしておく

- $dp[0][j] = \begin{cases} 1 & (j = 0) \\ 0 & (j \neq 0) \end{cases}$
- $dp[2N][N]$ が答え

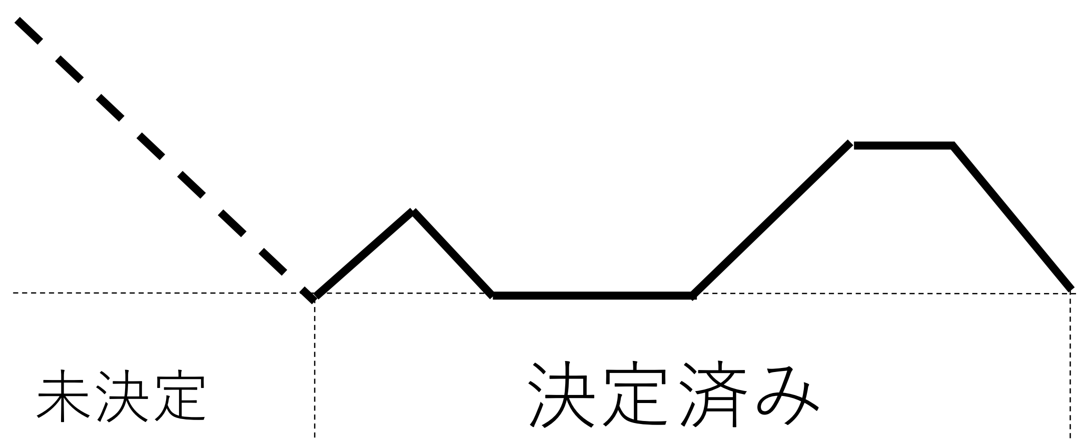
小課題 2 ($N \le 60$)

- $\sum_{j=1}^{k}(B_j - 1)$ の値の変化について考えてみる



小課題 2 $(N \leq 60)$

- A_i が残るときのDPの遷移について考察する
- 明らかに $A_i \in [N-j+1, N]$ であり、k' の値は変化しない
- $[N-j+1, N]$ 内でまだ置けることのできる値の個数を覚える必要がある



小課題 2 ($N \leq 60$)

- A を $(1,1',2,2',\ldots,N,N')$ の順列とする
- 1 と $1'$ は値としては同じように扱うが意味的には**異なる**ものとして扱う

- $dp[2N][N] \times \frac{1}{2^N}$ が答え
- $[N-j+1,N]$ 内でまだ置けることのできる値の個数は $j - \#\{k \in [0,i) | A_k$ は残る$\}$
- このように、数える対象を変えることで計算が容易になる場合がある

小課題 2 $(N \leq 60)$

- A_i が残るときのDPの遷移は以下のようになる

$$dp[i][j] = dp[i-1][j] \cdot (j - \#\{k \in [0, i) | A_k \text{は残る}\})$$

小課題 2 $(N \leq 60)$

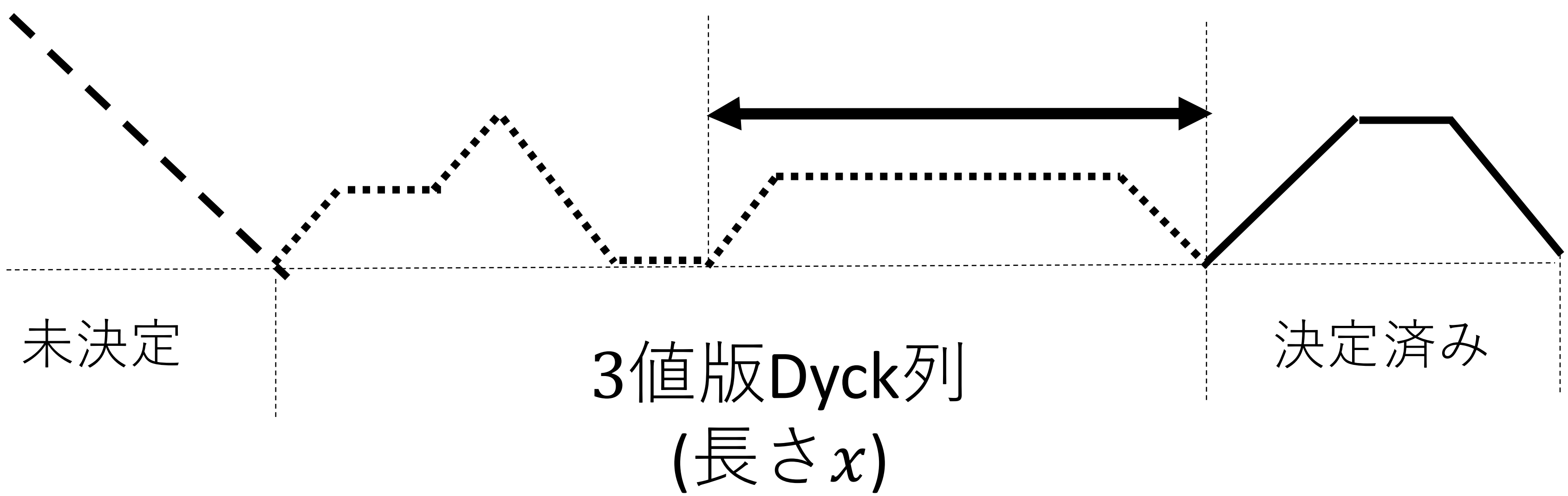
- A_i が残らないときのDPの遷移について考える
- k' の値は変化しないとき、$A_i \in [1, N - j + 1)$ なので未決定にしておく
- k' の値は変化する場合、未決定にしていた番号の値を決めなければならない
- 未決定にしていた番号は $num = \#\{k \in [0, i) | A_k \text{は残らない}\} - j$ 個存在する

小課題 2 ($N \leq 60$)

- k' の値が x だけ減ったとして、
  以下のように3値版Dyck列を付け加えたとする

小課題 2 ($N \leq 60$)

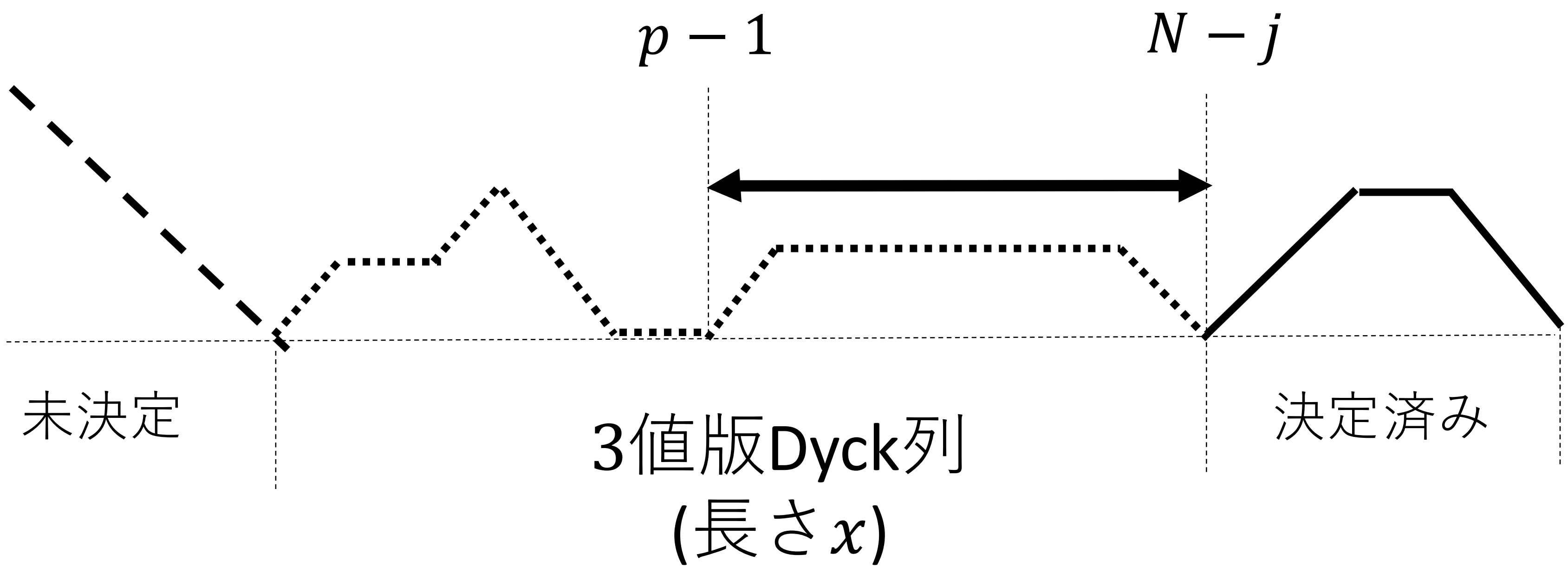
- このとき、 A_i の値は端点のみ横線に接するような3値版Dyck列の最も右側になる



小課題 2 ($N \leq 60$)

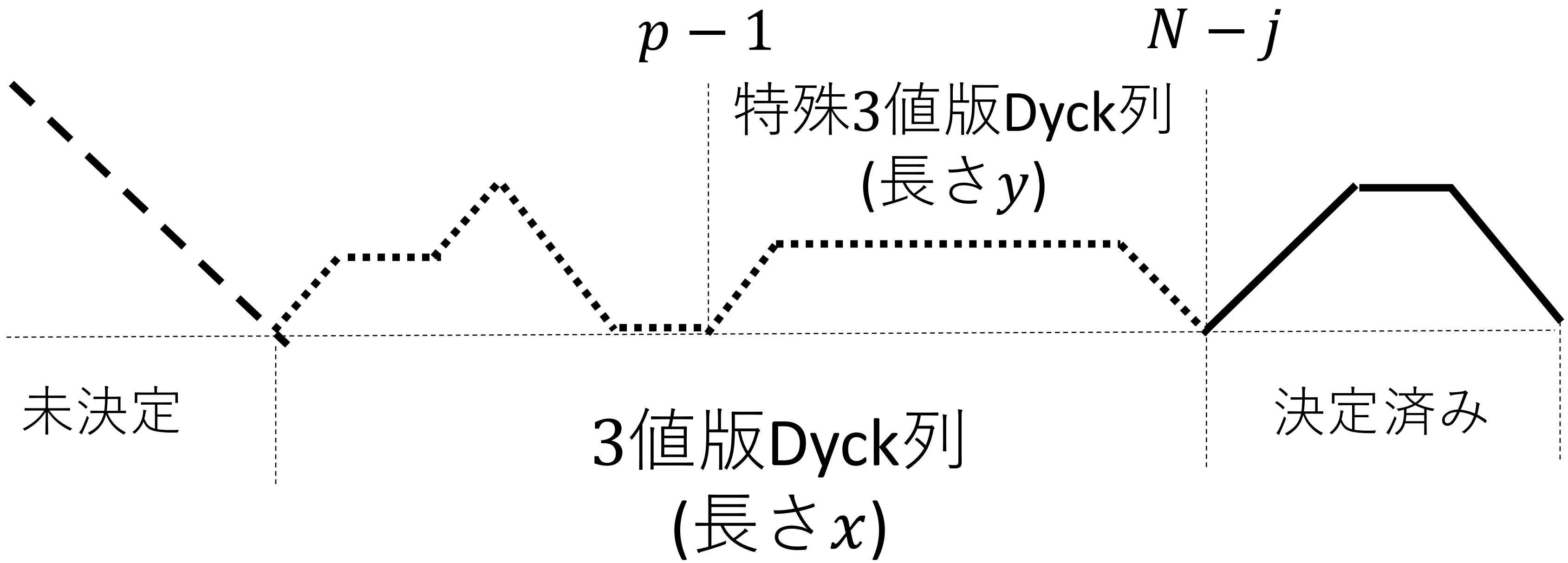
- 厳密に定義すると次のようになる

$p = \max\{k \in [N-j+1-x, N-j+1) \mid \sum_{l=k}^{N-j}(B_l - 1) = 0\}$
とすると、 $A_i \in [p, N-j+1)$ になる



小課題 2 ($N \leq 60$)

- $y = N - j + 1 - p$ とおくと、A_i の値としてありえる値の個数は y 個となる
- 端点のみ横線に接する3値版Dyck列を**特殊3値版Dyck列**と呼ぶことにする



小課題 2 ($N \leq 60$)

- 付け加える3値版Dyck列 $S = T + T'$（T' は特殊3値版Dyck列）が定まったとき、A の未決定である部分の決め方を考える

- 未決定である番号 $num + 1$ 個（i 番目も含む）の中で x 個選んで番号の列 I を決める
ただし、$i \in \{I_k | k \in [x - y + 1, x]\}$ が成り立つとする

- このような列の取り方の通り数は
$\binom{num}{x-1} \cdot (x-1)! \cdot y$

小課題 2 ($N \leq 60$)

- i , i' を $S_i + 1$ 個だけ順に並べた数列を構成する
- 例えば $S = (1,0,-1)$ のとき $(1,1',2)$ または $(1,1',2')$ となる

- A_{I_j} の値はこの数列の j 番目の値に対応させるようにする（値は適切にずらす）

- 数列の構成方法の通り数は $\prod_{i=1}^{x}(2-|S_i|) = \prod_{i=1}^{x-y}(2-|T_i|) \times \prod_{i=1}^{y}(2-|T'_i|)$

小課題 2 ($N \leq 60$)

- 長さ n の3値版Dyck列 S に対して $\prod_{i=1}^{n}(2-|S_i|)$ の値を $f(S)$ と定め、 $f(S)$ の総和をD_nとする
- 同様に特殊3値版Dyck列の場合を D'_n とする
- このように定義すると今までの考察からDPの遷移は以下のようになる

$$dp[i][j+x] \mathrel{+}= dp[i-1][j] \cdot \sum_{y=1}^{x} \binom{num}{x-1} \cdot (x-1)! \cdot y \cdot D_{x-y} \cdot D'_y$$

- D_n, D'_n は $O(N^2)$ のDPで計算できる

小課題 2 ($N \leq 60$)

- A_i が残るとき

$$dp[i][j] = dp[i-1][j] \cdot (j - \#\{k \in [0, i) | A_k \text{は残る}\})$$

- A_i が残らないとき

$$dp[i][j] += dp[i-1][j]$$

$$dp[i][j+x] += dp[i-1][j] \cdot \binom{num}{x-1} \cdot (x-1)! \cdot \sum_{y=1}^{x} y \cdot D_{x-y} \cdot D'_y$$

- $O(N^4)$ で計算できる
- 58点！

小課題 3 ($N \leq 600$)

- $\sum_{y=1}^{x} y \cdot D_{x-y} \cdot D'_y$ の値をあらかじめ計算しておけばよい（OEISで調べてみると $\binom{2x}{x}$ に等しいことがわかる）

- $O(N^3)$ で計算できる
- 100点！

小課題 3 ($N \leq 600$)

- 以下のように計算することもできる
- X_i を i 番目に小さい残る番号とする

$$dp'[0][j] = \begin{cases} 1 & (j = 0) \\ 0 & (j \neq 0) \end{cases}$$

$$dp'[i+1][j] \mathrel{+}= dp'[i][j] \cdot (j - i)$$

$$dp'[i+1][j+k] \mathrel{+}= dp'[i][j] \cdot \binom{X_{i+1} - i - j - 1}{k} \cdot \binom{2k}{k} \cdot k!$$

$dp'[N][N] \times \frac{1}{2^N}$ が答え

得点分布

6点

100点