## 题目大意

现有 $k$ 个人，你可以举办任意多次由三个人参加的聚会，现要求任意两个人都同时参加聚会恰好一次，试构造一组聚会方案。

可以说明，在给定的范围内一定有解。

## 数据范围

对于 $100\%$ 的数据，$1 \le k \le 3000$，保证 $k \bmod 6$ 为 $1$ 或 $3$。

本题采用子任务捆绑测试。

$\text{subtask1}(4pts)$：保证 $k=2^t-1$，$t$ 为正整数。

$\text{subtask2}(6pts)$：保证 $k=3^t$，$t$ 为非负整数。

$\text{subtask3}(15pts)$：保证 $k\equiv 1 \pmod{24}$。

$\text{subtask4}(7pts)$：保证 $k\equiv 7 \pmod{24}$。

$\text{subtask5}(15pts)$：保证 $k\equiv 13 \pmod{24}$。

$\text{subtask6}(7pts)$：保证 $k\equiv 19 \pmod{24}$。

$\text{subtask7}(15pts)$：保证 $k\equiv 3 \pmod{24}$。

$\text{subtask8}(7pts)$：保证 $k\equiv 21 \pmod{24}$。

$\text{subtask9}(10pts)$：保证 $k\equiv 9 \pmod{24}$。

$\text{subtask10}(7pts)$：保证 $k\equiv 15 \pmod{24}$。

$\text{subtask11}(7pts)$：无特殊性质。

时间限制：$\text{1s}$

空间限制：$\text{1024MB}$

## 解题过程

先观察一下题目的性质，容易计算出三元组的个数是 $\frac{k(k-1)}{6}$，所以 $k \bmod 6$ 不为 $2$ 和 $5$。又观察到包含 $1$ 的三元组个数为 $\frac{k-1}{2}$，所以 $k \bmod 6$ 不为 $0$ 和 $4$。所以可能有解的 $k$ 必须满足 $k \bmod 6$ 为 $1$ 或 $3$，下面将通过构造说明这是有解的充分条件。

### 算法一

当 $k=2^t-1$ 时，只要选取所有满足 $a\oplus b\oplus c=0$ 且 $a<b<c$ 的三元组 $(a,b,c)$ 即可，其中 $\oplus$ 为二进制异或。

证明：每一个二元组 $(a,b)$ 都会出现且仅出现在三元组 $(a,b,a\oplus b)$ 中。

期望可以通过 $\text{subtask1}$，获得 $4$ 分。

## 算法二

当 $k=3^t$ 时，只需选取满足如下条件的三元组 $(a+1,b+1,c+1)$ 即可。

- 对于每一个 $i\in[0,t)$，设 $x,y,z$ 分别为 $a,b,c$ 的三进制第 $i$ 位，满足 $x=y=z$ 或 $x,y,z$ 中 $0,1,2$ 各出现一次。
- $a<b<c$

证明：对于每一个二元组 $(a+1,b+1)$，$a,b$ 的每一个三进制位 $(x,y)$ 都有一个唯一的 $z$ 与之对应。设这 $t$ 个三进制位代表的数为 $c$，那么 $(a+1,b+1)$ 出现且仅出现在三元组 $(a+1,b+1,c+1)$ 中。

期望可以通过 subtask2，获得 6 分。

## 算法三

首先考虑当 $k=6n+1$ 的情况。考虑三元组个数为 $n(6n+1)$ 个，因为他是 $k$ 的倍数，所以考虑假设形成 $n$ 组 $\{c+1,(a_i+c)\bmod k+1,(b_i+c)\bmod k+1\},c\in[0,k-1]$，将其命名为循环组。

假设有一个环，环上依次放有 $1\sim k$ 的整数，那么如上的一组 $a_i,b_i$ 本质满足了所有环上距离为 $a_i,b_i,b_i-a_i$ 的二元组，将三元组 $\{a_i,b_i,b_i-a_i\}$ 命名为循环组代表。这相当于构造 $n$ 个循环组代表，满足每个循环组代表 $\{a,b,c\}$ 中 $a+b=c$ 或 $a+b+c=k$，且所有的 $a,b,c$ 包含每个 $[1,3n]$ 的数出现恰好一次。

至此，我们把构造 $O(n^2)$ 个数简化到了构造 $O(n)$ 个数，那么是时候直接构造了。

为了增加一些构造的限制，只考虑限制 $a+b=c$，即 $c-b=a$，考虑假设对于每一个 $1\sim n$ 都作为 $a$ 出现一次。那么相当于构造 $n$ 个二元组，每个 $[1,2n]$ 中的数恰好出现一次，第 $i$ 个二元组中 $a_i-b_i=i$。那么每个循环组代表就是 $\{i,a_i+n,b_i+n\}$。

通过一些关于总和奇偶性的计算，发现当 $n=4t$ 和 $n=4t+1$ 的时候可能有解。为描述方便，每个循环组用 $(a,b)$ 表示，其意义为存在一个循环组代表为 $\{b-a,a,b\}$ 对应的循环组。具体的解如下：

若 $n=4t$ 且 $t\geq 2$，构造：

- $(4t-1+i,8t+1-i),i\in[1,2t]$，也就是 $(4t,8t)\dots(6t-1,6t+1)$，差为 $4t,4t-2,\dots,2$
- $(i,4t-1-i),i\in[1,t-1]$，也就是 $(1,4t-2)\dots(t-1,3t)$，差为 $4t-3,\dots,2t-1$
- $(t+1+i,3t-i),i\in[1,t-2]$，也就是 $(t+2,3t-1)\dots(2t-1,2t+2)$，差为 $2t-3,\dots,3$
- $(t,t+1),(2t,4t-1),(2t+1,6t)$，差为 $1,2t-1,4t-1$

若 $n=4$，构造 $(2,3),(1,5),(4,7),(6,8)$。

若 $n=4t+1$ 且 $t\geq 2$，构造：

- $(4t+1+i,8t+3-i),i\in[1,2t]$，也就是 $(4t+2,8t+2)\dots(6t+1,6t+3)$，差为 $4t,4t-2,\dots,2$
- $(i,4t+1-i),i\in[1,t]$，也就是 $(1,4t)\dots(t,3t+1)$，差为 $4t-1,\dots,2t+1$
- $(t+2+i,3t+1-i),i\in[1,t-2]$，也就是 $(t+3,3t),\dots,(2t,2t+3)$，差为 $2t-3,\dots,3$
- $(t+1,t+2),(2t+2,4t+1),(2t+1,6t+2)$，差为 $1,2t-1,4t+1$

若 $n=5$，构造 $(2,3),(1,6),(4,7),(5,9),(8,10)$。

若 $n=1$，构造 $(1,2)$。

期望可以通过 subtask3,4，获得 22 分。

## 算法四

在刚才的情况中我们没有用到 $a+b+c=k$ 的限制，注意到在 $n=4t+2$ 或 $n=4t+3$ 的情况中使用一次即可满足奇偶性。那么在刚才的情况中略作修改：构造 $n$ 个二元组，每个 $[1,2n-1]\cup\{2n+1\}$ 中的数恰好出现一次，第 $i$ 个二元组中 $a_i-b_i=i$。那么 $2n+1$ 所在的二元组可以把 $2n+1$ 变成 $2n$ 以满足第二种限制。类似上面的，具体的解如下：

若 $n=4t+2$ 且 $t\ge 1$，构造：

- $(i,4t+2-i),i\in[1,2t]$，也就是 $(1,4t+1),\dots,(2t,2t+2)$，差为 $4t,4t-2,\dots,2$
- $(6t+3-i,6t+4+i),i\in[1,t-1]$，也就是 $(6t+2,6t+5),\dots,(5t+4,7t+3)$，差为 $3,\dots,2t-1$
- $(5t+2-i,7t+3+i),i\in[1,t]$，也就是 $(5t+1,7t+4),\dots,(4t+2,8t+3)$，差为 $2t+3,\dots,4t+1$
- $(2t+1,6t+3),(5t+2,5t+3),(6t+4,8t+5)$，差为 $4t+2,1,2t+1$

若 $n=2$，构造 $(1,2),(3,5)$。

若 $n=4t+3$ 且 $t\ge 1$，构造：

- $(i,4t+4-i),i\in[1,2t+1]$，也就是 $(1,4t+3),\dots,(2t+1,2t+3)$，差为 $4t+2,\dots,2$
- $(6t+5-i,6t+6+i),i\in[1,t-1]$，也就是 $(6t+4,6t+7),\dots,(5t+6,7t+5)$，差为 $3,\dots,2t-1$
- $(5t+4-i,7t+5+i),i\in[1,t]$，也就是 $(5t+3,7t+6),\dots,(4t+4,8t+5)$，差为 $2t+3,\dots,4t+1$
- $(2t+2,6t+5),(5t+4,5t+5),(6t+6,8t+7)$，差为 $4t+3,1,2t+1$

若 $n=3$，构造 $(1,4),(2,3),(5,7)$。

期望可以通过 subtask5,6，获得 22 分。

结合算法三可以完成所有 $k \bmod 6=1$ 的构造，获得 44 分。

## 算法五

若 $k=6n+3$，三元组数为 $(3n+1)(2n+1)=n(6n+3)+2n+1$，猜测是 $\{c,2n+1+c,4n+2+c\},c\in[1,2n+1]$ 和若干组类似上面的，差为 $[1,2n]\cup[2n+2,3n+1]$ 的二元组，这应当通过 $n$ 组类似上面的循环组得到。

例如当 $n=4t$ 时，类似算法三的构造 $n$ 个二元组，由 $[1,n]\cup[n+2,2n+1]$ 构成，满足 $b_i-a_i=i$。

通过一些关于总和奇偶性的计算，发现当 $n=4t$ 和 $n=4t+3$ 的时候可能有解。

当 $n=4t$ 且 $t\ge 1$ 时，构造：

- $(i,4t+1-i),i\in[1,t-1]$，也就是 $(1,4t)\dots(t-1,3t+2)$，差为 $4t-1,\dots,2t+3$
- $(2t-1-i,2t+i),i\in[1,t-1]$，也就是 $(2t-2,2t+1)\dots(t,3t-1)$，差为 $3,\dots,2t-1$
- $(6t+1-i,6t+1+i),i\in[1,t-1]$，也就是 $(6t,6t+2)\dots(5t+2,7t)$，差为 $2,\dots,2t-2$
- $(5t+1-i,7t+1+i),i\in[1,t-1]$，也就是 $(5t,7t+2)\dots(4t,8t)$，差为 $2t+2,\dots,4t$
- $(2t-1,2t),(3t,5t+1),(3t+1,7t+1),(6t+1,8t+1)$，差为 $1,2t+1,4t,2t$

当 $n=4t+3$ 且 $t\ge 1$ 时，构造：

- $(i,4t+4-i),i\in[1,2t+1]$，也就是 $(1,4t+3)\dots(2t+1,2t+3)$，差为 $4t+2,\dots,2$
- $(6t+4-i,6t+5+i),i\in[1,t]$，也就是 $(6t+3,6t+6)\dots(5t+4,7t+5)$，差为 $3,..,2t+1$
- $(5t+4-i,7t+7+i),i\in[1,t-1]$，也就是 $(5t+3,7t+8)\dots(4t+5,8t+6)$，差为 $2t+5,\dots,4t+1$
- $(7t+6,7t+7),(6t+4,8t+7),(2t+2,6t+5)$，差为 $1,2t+3,4t+3$

当 $n=3$ 时，构造 $(1,3),(2,5),(6,7)$。

期望可以通过 subtask7,8，获得 22 分。

## 算法六

类似算法三向算法四的改进，把 $2n+1$ 变成 $2n+2$。

当 $n=4t+1$ 且 $t\ge 2$ 时，构造：

- $(i,4t+2-i),i\in[1,2t]$，也就是 $(1,4t+1)\dots(2t,2t+2)$，差为 $4t,\dots,2$
- $(6t+1-i,6t+2+i),i\in[1,t]$，也就是 $(6t,6t+3)\dots(5t+1,7t+2)$，差为 $3,\dots,2t+1$
- $(5t+1-i,7t+4+i),i\in[1,t-2]$，也就是 $(5t,7t+5)\dots(4t+3,8t+2)$，差为 $2t+5...4t-1$
- $(7t+3,7t+4),(6t+1,8t+4),(2t+1,6t+2)$，差为 $1,2t+3,4t+1$

当 $n=5$ 时，构造 $(1,4),(2,3),(5,10),(7,9),(8,12)$。

当 $n=1$ 时，无法构造，但是此时 $k=9$，可以通过算法二中的构造或者直接爆搜得到一组解。

当 $n=4t+2$ 且 $t\ge 2$ 时，构造：

- $(i,4t+3-i),i\in[1,2t]$，也就是 $(1,4t+2)\dots(2t,2t+3)$，差为 $4t+1,\dots,3$
- $(6t+2-i,6t+4+i),i\in[1,t-2]$，也就是 $(6t+1,6t+5)\dots(5t+4,7t+2)$，差为 $4,\dots,2t-2$
- $(5t+4-i,7t+4+i),i\in[1,t-1]$，也就是 $(5t+3,7t+5)\dots(4t+3,8t+3)$，差为 $2t+2...4t-2$
- $(7t+3,7t+4),(8t+4,8t+6),(4t+4,6t+4),(2t+2,6t+2),(2t+1,6t+3)$，差为 $1,2,2t,4t,4t+2$

当 $n=6$ 时，构造 $(2,4),(5,8),(11,12),(10,14),(1,6),(3,9)$。

当 $n=2$ 时，构造 $(1,2),(4,6)$。

期望可以通过 subtask9,10，获得 17 分。

结合算法二三四五六，可以通过本题，获得 100 分。

# 参考资料


[1] Wikipedia. Kirkman's schoolgirl problem. https://en.wikipedia.org/wiki/Kirkman%27s_schoolgirl_problem

[2] OI-Wiki. 构造. https://oi-wiki.org/basic/construction